Необходимо найти максимальное значение целевой функции F = 4x1+6x2 → max, при системе ограничений:

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x1 ≥ 0, (5)

x2 ≥ 0, (6)

где x1, x2 - целые числа.

Шаг №1. Построим область допустимых решений, т.е. решим графически систему неравенств. Для этого построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами (полуплоскости обозначены штрихом).

или

Шаг №2. Границы области допустимых решений.

Пересечением полуплоскостей будет являться область, координаты точек которого удовлетворяют условию неравенствам системы ограничений задачи.

Обозначим границы области многоугольника решений.

Шаг №3. Рассмотрим целевую функцию задачи F = 4x1+6x2 → max.

Построим прямую, отвечающую значению функции F = 4x1+6x2 = 0. Вектор-градиент, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление максимизации F(X). Начало вектора – точка (0; 0), конец – точка (4;6). Будем двигать эту прямую параллельным образом. Поскольку нас интересует максимальное решение, поэтому двигаем прямую до последнего касания обозначенной области. На графике эта прямая обозначена пунктирной линией.

Прямая **F(x) = const** пересекает область в точке C. Так как точка C получена в результате пересечения прямых **(3)** и **(4)**, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

3x2=3.5

x1+x2=3.9

Решив систему уравнений, получим: x1 = 2.7333, x2 = 1.1667

Откуда найдем максимальное значение целевой функции:

F(x) = 4∙2.7333 + 6∙1.1667 = 17.9333

Оптимальное значение переменной x2=1.17 оказалось нецелочисленным.

Разбиваем задачу 1 на две подзадачи 11 и 12.

В первой из них к условиям задачи 11 добавляется условие х2 ≥ 2, а к задаче 12 — условие х2 ≤ 1.

Эта процедура называется *ветвлением* по переменной х2.

Решим графически задачу 11 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≥2, (5)

x1 ≥ 0, (6)

x2 ≥ 0, (7)

Задача не имеет допустимых решений. ОДР представляет собой пустое множество.

Задача 11 не имеет решения, поэтому для нее процесс ветвления прерываем.

Решим графически задачу 12 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1 ≥ 0, (6)

x2 ≥ 0, (7)

Прямая **F(x) = const** пересекает область в точке C. Так как точка C получена в результате пересечения прямых **(4)** и **(5)**, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

x1+x2=3.9

x2=1

Решив систему уравнений, получим: x1 = 2.9, x2 = 1

Откуда найдем максимальное значение целевой функции:

F(x) = 4∙2.9 + 6∙1 = 17.6

Оптимальное значение переменной x1=2.9 оказалось нецелочисленным.

Разбиваем задачу 12 на две подзадачи 121 и 122.

В первой из них к условиям задачи 121 добавляется условие х1 ≥ 3, а к задаче 122 — условие х1 ≤ 2.

Решим графически задачу 121 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1≥3, (6)

x1 ≥ 0, (7)

x2 ≥ 0, (8)

Прямая **F(x) = const** пересекает область в точке B. Так как точка B получена в результате пересечения прямых **(4)** и **(6)**, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

x1+x2=3.9

x1=3

Решив систему уравнений, получим: x1 = 3, x2 = 0.9

Откуда найдем максимальное значение целевой функции:

F(x) = 4∙3 + 6∙0.9 = 17.4

Решим графически задачу 122 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1≤2, (6)

x1 ≥ 0, (7)

x2 ≥ 0, (8)

Задача не имеет допустимых решений. ОДР представляет собой пустое множество.

Задача 122 не имеет решения, поэтому процесс ветвления прерываем.

Оптимальное значение переменной x2=0.9 оказалось нецелочисленным.

Разбиваем задачу 121 на две подзадачи 1211 и 1212.

В первой из них к условиям задачи 1211 добавляется условие х2 ≥ 1, а к задаче 1212 — условие х2 = 0.

Решим графически задачу 1211 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1≥3, (6)

x2≥1, (7)

x1 ≥ 0, (8)

x2 ≥ 0, (9)

Сведем систему ограничений к следующему виду:

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2=1, (5)

x1≥3, (6)

x1 ≥ 0, (7)

x2 ≥ 0, (8)

Задача не имеет допустимых решений. ОДР представляет собой пустое множество.

Задача 1211 не имеет решения, поэтому для нее процесс ветвления прерываем.

Решим графически задачу 1212 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1≥3, (6)

x2=0, (7)

x1 ≥ 0, (8)

x2 ≥ 0, (9)

Прямая **F(x) = const** пересекает область в точке B. Так как точка B получена в результате пересечения прямых **(4)** и **(7)**, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

x1+x2=3.9

x2=0

Решив систему уравнений, получим: x1 = 3.9, x2 = 0

Откуда найдем максимальное значение целевой функции:

F(x) = 4∙3.9 + 6∙0 = 15.6

Оптимальное значение переменной x1=3.9 оказалось нецелочисленным.

Разбиваем задачу 1212 на две подзадачи 12121 и 12122.

В первой из них к условиям задачи 12121 добавляется условие х1 ≥ 4, а к задаче 12122 — условие х1 ≤ 3.

Решим графически задачу 12121 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1≥3, (6)

x2=0, (7)

x1≥4, (8)

x1 ≥ 0, (9)

x2 ≥ 0, (10)

Задача не имеет допустимых решений. ОДР представляет собой пустое множество.

Задача 12121 не имеет решения, поэтому для нее процесс ветвления прерываем.

Решим графически задачу 12122 как задачу ЛП.

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1≥3, (6)

x2=0, (7)

x1≤3, (8)

x1 ≥ 0, (9)

x2 ≥ 0, (10)

Сведем систему ограничений к следующему виду:

5x1-2x2≥10.2, (1)

-2x1+x2≤5, (2)

3x2≤3.5, (3)

x1+x2≤3.9, (4)

x2≤1, (5)

x1=3, (6)

x2=0, (7)

x1 ≥ 0, (8)

x2 ≥ 0, (9)

Прямая **F(x) = const** пересекает область в точке A. Так как точка A получена в результате пересечения прямых **(6)** и **(7)**, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

x1=3

x2=0

Решив систему уравнений, получим: x1 = 3, x2 = 0

Откуда найдем максимальное значение целевой функции:

F(x) = 4∙3 + 6∙0 = 12

Решение задачи 12122 получилось целочисленным.

Новое значение текущего рекорда будет равно F(X) = 12.

Так как найденная точка является первым целочисленным решением, то ее и соответствующее ей значение ЦФ следует запомнить. Сама точка называется **текущим целочисленным рекордом** или просто рекордом, а оптимальное значение целочисленной задачи — **текущим значением рекорда**. Это значение является нижней границей оптимального значения исходной задачи Z∙.

F(X) = 12

x1 = 3

x2 = 0

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Целочисленное программирование. Метод ветвей и границ](https://math.semestr.ru/lp/branch.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Графический метод](https://math.semestr.ru/lp/integer.php)

[Решение симплекс-методом](https://math.semestr.ru/simplex/simplex.php)

[Решение задач линейного программирования графическим методом](https://math.semestr.ru/lp/index.php)

[Двойственная задача линейного программирования](https://math.semestr.ru/simplex/msimplex.php)

[Метод Гомори](https://math.semestr.ru/simplex/integer.php)

[Транспортная задача](https://math.semestr.ru/transp/index.php)

[Расчет сетевого графика](https://math.semestr.ru/setm/index.php)

[Динамическое программирование](https://math.semestr.ru/dinam/dinamprog.php)

[Теория массового обслуживания](https://math.semestr.ru/cmo/cmo_manual.php)