Исходные данные.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| f1 | f2 | f3 | f4 | xi |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 7 | 6 | 6 | 40 |
| 10 | 11 | 9 | 10 | 80 |
| 13 | 14 | 12 | 15 | 120 |
| 16 | 17 | 16 | 18 | 160 |
| 20 | 21 | 20 | 22 | 200 |

**I этап. Условная оптимизация**.

1-ый шаг. k = 4.

Предположим, что все средства в количестве x4 = 200 отданы предприятию №4. В этом случае, максимальный доход, как это видно из таблицы, составит f4(u4) = 22, следовательно, F4(e4) = f4(u4)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| e3 | u4 | e4 = e3 - u4 | f4(u4) | F∙4(e4) | u4(e4) |
| 40 | 0 | 40 | 0 |   |   |
| 40 | 0 | 6 | 6 | 40 |
| 80 | 0 | 80 | 0 |   |   |
| 40 | 40 | 6 |   |   |
| 80 | 0 | 10 | 10 | 80 |
| 120 | 0 | 120 | 0 |   |   |
| 40 | 80 | 6 |   |   |
| 80 | 40 | 10 |   |   |
| 120 | 0 | 15 | 15 | 120 |
| 160 | 0 | 160 | 0 |   |   |
| 40 | 120 | 6 |   |   |
| 80 | 80 | 10 |   |   |
| 120 | 40 | 15 |   |   |
| 160 | 0 | 18 | 18 | 160 |
| 200 | 0 | 200 | 0 |   |   |
| 40 | 160 | 6 |   |   |
| 80 | 120 | 10 |   |   |
| 120 | 80 | 15 |   |   |
| 160 | 40 | 18 |   |   |
| 200 | 0 | 22 | 22 | 200 |

2-ый шаг. k = 3.

Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между предприятиями №3, 4. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид: F3(e3) = max(x3 ≤ e3)(f3(u3) + F4(e3-u3))

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| e2 | u3 | e3 = e2 - u3 | f3(u3) | F∙3(e2) | F2(u3,e2) | F∙3(e3) | u3(e3) |
| 40 | 0 | 40 | 0 | 6 | 6 | 6 | 0 |
| 40 | 0 | 6 | 0 | 6 |   |   |
| 80 | 0 | 80 | 0 | 10 | 10 |   |   |
| 40 | 40 | 6 | 6 | 12 | 12 | 40 |
| 80 | 0 | 9 | 0 | 9 |   |   |
| 120 | 0 | 120 | 0 | 15 | 15 |   |   |
| 40 | 80 | 6 | 10 | 16 | 16 | 40 |
| 80 | 40 | 9 | 6 | 15 |   |   |
| 120 | 0 | 12 | 0 | 12 |   |   |
| 160 | 0 | 160 | 0 | 18 | 18 |   |   |
| 40 | 120 | 6 | 15 | 21 | 21 | 40 |
| 80 | 80 | 9 | 10 | 19 |   |   |
| 120 | 40 | 12 | 6 | 18 |   |   |
| 160 | 0 | 16 | 0 | 16 |   |   |
| 200 | 0 | 200 | 0 | 22 | 22 |   |   |
| 40 | 160 | 6 | 18 | 24 | 24 | 40 |
| 80 | 120 | 9 | 15 | 24 |   |   |
| 120 | 80 | 12 | 10 | 22 |   |   |
| 160 | 40 | 16 | 6 | 22 |   |   |
| 200 | 0 | 20 | 0 | 20 |   |   |

3-ый шаг. k = 2.

Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между предприятиями №2, 3, 4. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид: F2(e2) = max(x2 ≤ e2)(f2(u2) + F3(e2-u2))

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| e1 | u2 | e2 = e1 - u2 | f2(u2) | F∙2(e1) | F1(u2,e1) | F∙2(e2) | u2(e2) |
| 40 | 0 | 40 | 0 | 6 | 6 |   |   |
| 40 | 0 | 7 | 0 | 7 | 7 | 40 |
| 80 | 0 | 80 | 0 | 12 | 12 |   |   |
| 40 | 40 | 7 | 6 | 13 | 13 | 40 |
| 80 | 0 | 11 | 0 | 11 |   |   |
| 120 | 0 | 120 | 0 | 16 | 16 |   |   |
| 40 | 80 | 7 | 12 | 19 | 19 | 40 |
| 80 | 40 | 11 | 6 | 17 |   |   |
| 120 | 0 | 14 | 0 | 14 |   |   |
| 160 | 0 | 160 | 0 | 21 | 21 |   |   |
| 40 | 120 | 7 | 16 | 23 | 23 | 40 |
| 80 | 80 | 11 | 12 | 23 |   |   |
| 120 | 40 | 14 | 6 | 20 |   |   |
| 160 | 0 | 17 | 0 | 17 |   |   |
| 200 | 0 | 200 | 0 | 24 | 24 |   |   |
| 40 | 160 | 7 | 21 | 28 | 28 | 40 |
| 80 | 120 | 11 | 16 | 27 |   |   |
| 120 | 80 | 14 | 12 | 26 |   |   |
| 160 | 40 | 17 | 6 | 23 |   |   |
| 200 | 0 | 21 | 0 | 21 |   |   |

4-ый шаг. k = 1.

Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между предприятиями №1, 2, 3, 4. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид: F1(e1) = max(x1 ≤ e1)(f1(u1) + F2(e1-u1))

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| e0 | u1 | e1 = e0 - u1 | f1(u1) | F∙1(e0) | F0(u1,e0) | F∙1(e1) | u1(e1) |
| 40 | 0 | 40 | 0 | 7 | 7 |   |   |
| 40 | 0 | 8 | 0 | 8 | 8 | 40 |
| 80 | 0 | 80 | 0 | 13 | 13 |   |   |
| 40 | 40 | 8 | 7 | 15 | 15 | 40 |
| 80 | 0 | 10 | 0 | 10 |   |   |
| 120 | 0 | 120 | 0 | 19 | 19 |   |   |
| 40 | 80 | 8 | 13 | 21 | 21 | 40 |
| 80 | 40 | 10 | 7 | 17 |   |   |
| 120 | 0 | 13 | 0 | 13 |   |   |
| 160 | 0 | 160 | 0 | 23 | 23 |   |   |
| 40 | 120 | 8 | 19 | 27 | 27 | 40 |
| 80 | 80 | 10 | 13 | 23 |   |   |
| 120 | 40 | 13 | 7 | 20 |   |   |
| 160 | 0 | 16 | 0 | 16 |   |   |
| 200 | 0 | 200 | 0 | 28 | 28 |   |   |
| 40 | 160 | 8 | 23 | 31 | 31 | 40 |
| 80 | 120 | 10 | 19 | 29 |   |   |
| 120 | 80 | 13 | 13 | 26 |   |   |
| 160 | 40 | 16 | 7 | 23 |   |   |
| 200 | 0 | 20 | 0 | 20 |   |   |

Поясним построение таблиц и последовательность проведения расчетов.

Столбцы 1 (вложенные средства), 2 (проект) и 3 (остаток средств) для всех трех таблиц одинаковы, поэтому их можно было бы сделать общими. Столбец 4 заполняется на основе исходных данных о функциях дохода, значения в столбце 5 берутся из столбца 7 предыдущей таблицы, столбец 6 заполняется суммой значений столбцов 4 и 5 (в таблице 4-го шага столбцы 5 и 6 отсутствуют).

В столбце 7 записывается максимальное значение предыдущего столбца для фиксированного начального состояния, и в 8 столбце записывается управление из 2 столбца, на котором достигается максимум в 7.

**Этап II. Безусловная оптимизация**.

Из таблицы 4-го шага имеем F∙1(e0 = 200) = 31. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств e0 = 200 равен 31

Из этой же таблицы получаем, что 1-му предприятию следует выделить u∙1(e0 = 200) = 40

При этом остаток средств составит:

e1 = e0 - u1 = 200 - 40 = 160

Из таблицы 3-го шага имеем F∙2(e1 = 160) = 23. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств e1 = 160 равен 23

Из этой же таблицы получаем, что 2-му предприятию следует выделить u∙2(e1 = 160) = 40

При этом остаток средств составит:

e2 = e1 - u2 = 160 - 40 = 120

Из таблицы 2-го шага имеем F∙3(e2 = 120) = 16. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств e2 = 120 равен 16

Из этой же таблицы получаем, что 3-му предприятию следует выделить u∙3(e2 = 120) = 40

При этом остаток средств составит:

e3 = e2 - u3 = 120 - 40 = 80

Последнему предприятию достается 80

Итак, инвестиции в размере 200 необходимо распределить следующим образом:

1-му предприятию выделить 40

2-му предприятию выделить 40

3-му предприятию выделить 40

4-му предприятию выделить 80

Что обеспечит максимальный доход, равный 31

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Задача оптимального распределения инвестиций](https://math.semestr.ru/dinam/dinam.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Задача замены оборудования](https://math.semestr.ru/dinam/zamena.php)

[Метод прямой и обратной прогонки](https://math.semestr.ru/dinam/progonka.php)

[Линейное программирование онлайн](https://math.semestr.ru/simplex/simplex_manual.php)

[Теория массового обслуживания (СМО)](https://math.semestr.ru/cmo/cmo_manual.php)

[Теория игр](https://math.semestr.ru/games/games_manual.php)