**Задача Джонсона. Пример решения**

Рассмотрим задачу последовательной обработки на двух машинах N различных деталей, если известно время Ai и Bi обработки *i*-й детали на соответствующих машинах. Очевидно, что первая машина будет загружена полностью, но вторая может периодически оказываться в состоянии простоя. Попытаемся найти порядок обработки, минимизирующий время простоя второй машины и тем самым сокращающий общее время обработки деталей.

Если обозначить через Xi - время простоя в ожидании *i*-й детали, то:

A1

X1 + X2 = max(A1 + A2 - B1, A1)

X1 + X2 + X3 = max(A1 + A2 +A3 - B1 - B2, A1 + A2 - B1, A1)

∑Xi = max(∑Ai - ∑Bi)

Если обозначить через F(t, Ak, Bk/k=1..N) - суммарное время обработки N деталей при условии, что вторая машина включается с задержкой t и используется оптимальный порядок обработки, то c учетом принципа оптимальности (независимо от выбора начальной детали порядок выбора последующих должен быть оптимальным) имеем:

F(t, Ak, Bk/k = 1..N) = min(Ai + F(Bi + max(t-Ai,0),Ak,Bk=1..N,k≠i))

Если после *i*-й детали при оптимальном порядке обрабатывается *j*-я, то:

F(t, Ak, Bk/k=1..N) = Ai + Aj + F(tij, Ak, Bk/k=1..N; k≠i,j)

где

tij = Bi + max[Bj + max(t-Aj,0) - Aj,0] = Bi + Bj - Ai - Aj + max[t, max(t,max(Aj - Ai - Bj,Aj))]

Если max(Ai + Aj - Bi,Ai) < max(Aj + Ai - Bj, Aj), то сначала разумнее обрабатывать *j*-ю деталь.

Можно показать, что указанное условие необходимости перестановки эквивалентно условию:

min(Aj, Bi) < min(Ai, Bj)

Соответственно ищем среди всех значений Ai и Bi наименьшее. Если найденное значение совпадает с некоторым Ai, то *i*-ю деталь ставим на обработку первой; если оно совпадает с некоторым B*i*, то последней. Эту процедуру повторяем для всех остальных деталей.

**Пример. Пусть информация о времени обработки задана таблицей**:

|  |  |
| --- | --- |
| 20 | 30 |
| 50 | 70 |
| 40 | 20 |
| 60 | 50 |
| 80 | 60 |

Шаг № 1.

Минимальное из значений соответствует A1: 1-ая деталь обрабатывается первой.

|  |  |
| --- | --- |
| 20 | 30 |
| - | - |
| - | - |
| - | - |
| - | - |

Шаг № 2.

Минимальное из значений равно 20 и соответствует B3: 3-ая деталь обрабатывается последней.

|  |  |
| --- | --- |
| 20 | 30 |
| - | - |
| - | - |
| - | - |
| 40 | 20 |

Шаг № 3.

Минимальное из значений соответствует A2: 2-ая деталь обрабатывается первой.

|  |  |
| --- | --- |
| 20 | 30 |
| 50 | 70 |
| - | - |
| - | - |
| 40 | 20 |

Шаг № 4.

Минимальное из значений равно 50 и соответствует B4: 4-ая деталь обрабатывается последней.

|  |  |
| --- | --- |
| 20 | 30 |
| 50 | 70 |
| - | - |
| 60 | 50 |
| 40 | 20 |

Шаг № 5.

Минимальное из значений равно 60 и соответствует B5: 5-ая деталь обрабатывается последней.

|  |  |
| --- | --- |
| 20 | 30 |
| 50 | 70 |
| 80 | 60 |
| 60 | 50 |
| 40 | 20 |

В итоге упорядоченная информация принимает вид:

|  |  |
| --- | --- |
| 20 | 30 |
| 50 | 70 |
| 80 | 60 |
| 60 | 50 |
| 40 | 20 |

Время простоя второй машины при первичном порядке равно:

max(20 , 20 + 50 - 30 , 20 + 50 + 40 - 30 - 70 , 20 + 50 + 40 + 60 - 30 - 70 - 20 , 20 + 50 + 40 + 60 + 80 - 30 - 70 - 20 - 50 ) = max(20, 40, 10, 50, 80) = 80

Время простоя при оптимальной перестановке равно:

max(20 , 20 + 50 - 30 , 20 + 50 + 80 - 30 - 70 , 20 + 50 + 80 + 60 - 30 - 70 - 60 , 20 + 50 + 80 + 60 + 40 - 30 - 70 - 60 - 50 ) = max(20, 40, 50, 50, 40) = 50

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Задача Джонсона](https://math.semestr.ru/dinam/jonson.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Задача оптимального распределения инвестиций](https://math.semestr.ru/dinam/dinam.php)

[Задача замены оборудования](https://math.semestr.ru/dinam/zamena.php)

[Метод прямой и обратной прогонки](https://math.semestr.ru/dinam/progonka.php)

[Линейное программирование онлайн](https://math.semestr.ru/simplex/simplex_manual.php)

[Теория массового обслуживания (СМО)](https://math.semestr.ru/cmo/cmo_manual.php)

[Теория игр](https://math.semestr.ru/games/games_manual.php)