Для упрощения расчетов заменим функцию r(t) стоимости продукции на функцию доходов: r(t) = r(t) - u(t).

r(0) = 28 - 0 = 28

r(1) = 28 - 2 = 26

r(2) = 28 - 4 = 24

r(3) = 25 - 6 = 19

r(4) = 24 - 8 = 16

r(5) = 22 - 10 = 12

r(6) = 19 - 12 = 7

r(7) = 17 - 13 = 4

r(8) = 16 - 14 = 2

**I этап. Условная оптимизация** (k = 8,7,6,5,4,3,2,1).

Переменной управления на k-м шаге является логическая переменная, которая может принимать одно из двух значений: сохранить (С) или заменить (З) оборудование в начале k-го года.

1-й шаг: k = 8. Для 1-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3,4,5,6,7,8, а функциональные уравнения имеют вид:

F8(t) = max(r(t), (C); S(t) - P + r(0), (З) )

F8(1) = max(26 ; 0 - 26 + 28) = 26 (C)

F8(2) = max(24 ; 0 - 26 + 28) = 24 (C)

F8(3) = max(19 ; 0 - 26 + 28) = 19 (C)

F8(4) = max(16 ; 0 - 26 + 28) = 16 (C)

F8(5) = max(12 ; 0 - 26 + 28) = 12 (C)

F8(6) = max(7 ; 0 - 26 + 28) = 7 (C)

F8(7) = max(4 ; 0 - 26 + 28) = 4 (C)

F8(8) = max(2 ; 0 - 26 + 28) = 2 (C/З)

2-й шаг: k = 7. Для 2-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3,4,5,6,7, а функциональные уравнения имеют вид:

F7(t) = max(r(t) + F8(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F8(1))

F7(1) = max(26 + 24 ; 0 - 26 + 28 + 26) = 50 (C)

F7(2) = max(24 + 19 ; 0 - 26 + 28 + 26) = 43 (C)

F7(3) = max(19 + 16 ; 0 - 26 + 28 + 26) = 35 (C)

F7(4) = max(16 + 12 ; 0 - 26 + 28 + 26) = 28 (C/З)

F7(5) = max(12 + 7 ; 0 - 26 + 28 + 26) = 28 (З)

F7(6) = max(7 + 4 ; 0 - 26 + 28 + 26) = 28 (З)

F7(7) = max(4 + 2 ; 0 - 26 + 28 + 26) = 28 (З)

3-й шаг: k = 6. Для 3-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3,4,5,6, а функциональные уравнения имеют вид:

F6(t) = max(r(t) + F7(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F7(1))

F6(1) = max(26 + 43 ; 0 - 26 + 28 + 50) = 69 (C)

F6(2) = max(24 + 35 ; 0 - 26 + 28 + 50) = 59 (C)

F6(3) = max(19 + 28 ; 0 - 26 + 28 + 50) = 52 (З)

F6(4) = max(16 + 28 ; 0 - 26 + 28 + 50) = 52 (З)

F6(5) = max(12 + 28 ; 0 - 26 + 28 + 50) = 52 (З)

F6(6) = max(7 + 28 ; 0 - 26 + 28 + 50) = 52 (З)

4-й шаг: k = 5. Для 4-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3,4,5, а функциональные уравнения имеют вид:

F5(t) = max(r(t) + F6(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F6(1))

F5(1) = max(26 + 59 ; 0 - 26 + 28 + 69) = 85 (C)

F5(2) = max(24 + 52 ; 0 - 26 + 28 + 69) = 76 (C)

F5(3) = max(19 + 52 ; 0 - 26 + 28 + 69) = 71 (C/З)

F5(4) = max(16 + 52 ; 0 - 26 + 28 + 69) = 71 (З)

F5(5) = max(12 + 52 ; 0 - 26 + 28 + 69) = 71 (З)

5-й шаг: k = 4. Для 5-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3,4, а функциональные уравнения имеют вид:

F4(t) = max(r(t) + F5(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F5(1))

F4(1) = max(26 + 76 ; 0 - 26 + 28 + 85) = 102 (C)

F4(2) = max(24 + 71 ; 0 - 26 + 28 + 85) = 95 (C)

F4(3) = max(19 + 71 ; 0 - 26 + 28 + 85) = 90 (C)

F4(4) = max(16 + 71 ; 0 - 26 + 28 + 85) = 87 (C/З)

6-й шаг: k = 3. Для 6-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3, а функциональные уравнения имеют вид:

F3(t) = max(r(t) + F4(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F4(1))

F3(1) = max(26 + 95 ; 0 - 26 + 28 + 102) = 121 (C)

F3(2) = max(24 + 90 ; 0 - 26 + 28 + 102) = 114 (C)

F3(3) = max(19 + 87 ; 0 - 26 + 28 + 102) = 106 (C)

7-й шаг: k = 2. Для 7-го шага возможные состояния системы t = 1,2, а функциональные уравнения имеют вид:

F2(t) = max(r(t) + F3(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F3(1))

F2(1) = max(26 + 114 ; 0 - 26 + 28 + 121) = 140 (C)

F2(2) = max(24 + 106 ; 0 - 26 + 28 + 121) = 130 (C)

8-й шаг: k = 1. Для 8-го шага возможные состояния системы t = 1, а функциональные уравнения имеют вид:

F1(t) = max(r(t) + F2(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F2(1))

F1(1) = max(26 + 130 ; 0 - 26 + 28 + 140) = 156 (C)

Результаты вычислений по уравнениям Беллмана Fk(t) приведены в таблице, в которой k - год эксплуатации, а t - возраст оборудования.

Таблица – Матрица максимальных прибылей

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k / t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 156 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 140 | 130 |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 121 | 114 | 106 |  |  |  |  |  |
| 4 | 102 | 95 | 90 | 87 |  |  |  |  |
| 5 | 85 | 76 | 71 | **71** | **71** |  |  |  |
| 6 | 69 | 59 | **52** | **52** | **52** | **52** |  |  |
| 7 | 50 | 43 | 35 | 28 | **28** | **28** | **28** |  |
| 8 | 26 | 24 | 19 | 16 | 12 | 7 | 4 | 2 |

В таблице выделено значение функции, соответствующее состоянию (З) - замена оборудования.

При решении данной задачи в некоторых таблицах при оценке выбора нужного управления мы получали одинаковые значения F для обоих вариантов управления. В этом случае, в соответствии с алгоритмом решения подобных задач необходимо выбирать управление сохранения оборудования.

**II этап. Безусловная оптимизация** (k = 8,7,6,5,4,3,2,1).

По условию задачи возраст оборудования равен t1=0 годам. Плановый период N=8 лет.

К началу 1-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t1 = t0 + 1 = -1 + 1 = 0. Прибыль составит F1(0)=1.

Оптимальное управление при k = 1, x1(0) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 0-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 2-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t2 = t1 + 1 = 0 + 1 = 1. Прибыль составит F2(1)=140.

Оптимальное управление при k = 2, x2(1) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 1-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 3-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t3 = t2 + 1 = 1 + 1 = 2. Прибыль составит F3(2)=114.

Оптимальное управление при k = 3, x3(2) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 2-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 4-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t4 = t3 + 1 = 2 + 1 = 3. Прибыль составит F4(3)=90.

Оптимальное управление при k = 4, x4(3) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 3-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 5-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t5 = t4 + 1 = 3 + 1 = 4. Прибыль составит F5(4)=71.

Безусловное оптимальное управление при k = 5, x5(4)=(З), т.е. для получения максимума прибыли за оставшиеся годы необходимо в этом году провести замену оборудования.

К началу 6-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t6 = t5 + 1 = 0 + 1 = 1. Прибыль составит F6(1)=69.

Оптимальное управление при k = 6, x6(1) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 1-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 7-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t7 = t6 + 1 = 1 + 1 = 2. Прибыль составит F7(2)=43.

Оптимальное управление при k = 7, x7(2) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 2-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 8-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t8 = t7 + 1 = 2 + 1 = 3. Прибыль составит F8(3)=19.

Оптимальное управление при k = 8, x8(3) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 3-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

F1(0) → (C) → F2(1) → (C) → F3(2) → (C) → F4(3) → (C) → F5(4) → **(З)** → F6(1) → (C) → F7(2) → (C) → F8(3) → (C)

Таким образом, за 8 лет эксплуатации оборудования замену надо произвести:

- в начале 5-го года эксплуатации

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Задача замены оборудования](https://math.semestr.ru/dinam/zamena.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Задача оптимального распределения инвестиций](https://math.semestr.ru/dinam/dinam.php)

[Метод прямой и обратной прогонки](https://math.semestr.ru/dinam/progonka.php)

[Линейное программирование онлайн](https://math.semestr.ru/simplex/simplex_manual.php)

[Теория массового обслуживания (СМО)](https://math.semestr.ru/cmo/cmo_manual.php)

[Теория игр](https://math.semestr.ru/games/games_manual.php)