**Система линейных уравнений**.

**Метод характеристического уравнения**.

Исходная матрица имеет вид:

Составляем систему для определения координат собственных векторов:

(-2 - λ)x1 + 1x2-2x3 = 0

1x1 + (-2 - λ)x2 + 2x3 = 0

3x1-3x2 + (5 - λ)x3 = 0

Составляем характеристическое уравнение и решаем его.

Для этого находим определитель матрицы и приравниваем полученное выражение к нулю.

После преобразований, получаем:

Подставляя λ1 = 3 в систему, имеем:

или

Решаем эту систему линейных однородных уравнений.

Выпишем основную матрицу системы:

Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы.

Умножим 2-ую строку на (5). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

Умножим 2-ую строку на (-3). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

В матрице *B* 1-ая и 2-ая строки пропорциональны, следовательно, одну из них, например 1-ю, можно вычеркнуть. Это равносильно вычеркиванию 1-го уравнения системы, так как оно является следствием 2-го.

Найдем ранг матрицы.

Выделенный минор имеет наивысший порядок (из возможных миноров) и отличен от нуля (он равен произведению элементов, стоящих на обратной диагонали), следовательно rang(A) = 2.

Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных x1,x2, значит, неизвестные x1,x2 – зависимые (базисные), а x3 – свободные.

Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:

12x2 = 4x3

3x1 - 3x2 = - 2x3

Методом исключения неизвестных находим **нетривиальное решение**:

Получили соотношения, выражающие зависимые переменные x1,x2 через свободные x3, то есть нашли **общее решение**:

x2=1/3x3

x1= - 1/3x3

Множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ1 = 3, имеет вид:

(1x3,-1x3,-3x3) = x3(1,-1,-3)

где x3 - любое число, отличное от нуля. Выберем из этого множества один вектор, например, положив x3 = -3:

Подставляя λ2 = -1 в систему, имеем:

или

Решаем эту систему линейных однородных уравнений

Выпишем основную матрицу системы:

Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы.

В матрице *B* 1-й и 2-й столбцы пропорциональны. Из двух пропорциональных столбцов в базисный минор может попасть только один. Для системы это означает перенос членов с x1 в правую часть уравнений.

В матрице *B* 1-ая и 2-ая строки пропорциональны, следовательно, одну из них, например 1-ю, можно вычеркнуть. Это равносильно вычеркиванию 1-го уравнения системы, так как оно является следствием 2-го.

Умножим 1-ую строку на (-3). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

В матрице *B* 1-ая строка нулевая, следовательно, вычеркиваем ее. Это равносильно вычеркиванию 1-го уравнения системы.

Найдем ранг матрицы.

Rang(A) = 1.

Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных x1, значит, неизвестные x1 – зависимые (базисные), а x2,x3 – свободные.

Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:

- 3x1 = 3x2 - 6x3

Получили соотношения, выражающие зависимые переменные x1 через свободные x2,x3, то есть нашли **общее решение**:

x1= - x2 + 2x3

Находим фундаментальную систему решений, которая состоит из (n-r) решений.

В нашем случае n=3, r=1, следовательно, фундаментальная система решений состоит из 2-х решений, причем эти решения должны быть линейно независимыми.

Чтобы строки были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из элементов строк, был равен количеству строк, то есть 2.

Достаточно придать свободным неизвестным x2,x3 значения из строк определителя 2-го порядка, отличного от нуля, и подсчитать x1.

Простейшим определителем, отличным от нуля, является единичная матрица.

Таким образом, имеем:

Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций , , , а общее решение имеет вид:

**Найдем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям**:

x(0)=1, y(0)=0, z(0)=-1

или

c1=0, c2=-1, c3=0

Частное решение:

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Системы дифференциальных уравнений](https://math.semestr.ru/math/dsystem.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Дифференциальные уравнения онлайн](https://math.semestr.ru/math/diffur.php)

[Линейные уравнения первого порядка](https://math.semestr.ru/math/lec_diffur_5.php)

[Уравнения с разделяющимися переменными](https://math.semestr.ru/math/lec_diffur_2.php)

[Собственные числа матрицы онлайн](https://math.semestr.ru/gauss/ownvectors.php)

[Производная онлайн](https://math.semestr.ru/math/diff.php)

[Интегралы онлайн](https://math.semestr.ru/math/int.php)