Шаг №1. Определение стационарных точек.

Найдем экстремум функции , используя функцию Лагранжа:

где F(X) - целевая функция вектора X

φi(X) - ограничения в неявном виде (i=1..n)

В качестве целевой функции, подлежащей оптимизации, в этой задаче выступает функция:

Перепишем ограничение задачи в неявном виде:

Составим вспомогательную функцию Лагранжа:

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по переменным хi и неопределенным множителям

Составим систему:

, ≥ 0

, ≥ 0

Решим следующие подзадачи:

Подзадача №1

Решим следующую систему уравнений:

, ≥ 0

Рассмотрим два варианта:

a) ≠ 0

Выражаем x1 из последнего уравнения и подставляем в остальные:

x1=3∙x2

Выразим x2 из первого и второго уравнения:

Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.

b)

Выражаем x1 из последнего уравнения и подставляем в первое:

Пусть μ=0, тогда x1=2

Подзадача №2

Решим следующую систему уравнений:

, ≥ 0

Рассмотрим два варианта:

a) ≠ 0

Выражаем x1 из последнего уравнения и подставляем в остальные:

x1=2-x2/2

Выразим x2 из первого и второго уравнения:

Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.

b)

Выражаем x1 из последнего уравнения и подставляем в первое:

Пусть μ=0, тогда x1=2

Шаг №2. Проверка условий Куна-Таккера.

*Теорема Куна-Таккера*. Чтобы найденный план X0 был решением задачи необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор μ0 такой, что пара (X0, μ0) для всех X ≥ 0 и μ ≥ 0.

L(X, μ0) ≤ L(X0, μ0) ≤ L(X0, μ)

Чтобы функция двух векторных переменных имела седловую точку, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

X(0, 0). Данная точка удовлетворяет всем условиям. Значение функции f(x)=104

X(0, 0). Данная точка удовлетворяет всем условиям. Значение функции f(x)=104

Шаг №3. Определение вида экстремума.

Для функции L(x,λ, μ) находят матрицу Гессе HL. Если матрица HL положительно определена - найденная точка x является точкой минимума, если матрица HL отрицательно определена - найденная точка x является точкой максимума.

L(x,λ, μ) = (x1-10)2+(x2-2)2

**1. Найдем частные производные**.

**2. Решим систему уравнений**.

а) Из первого уравнения выражаем x1 и подставляем во второе уравнение:

Откуда:

б) Из первого уравнения выражаем x2 и подставляем во второе уравнение:

Откуда:

Данные значения *x* подставляем в выражение для *y*. Получаем:

Количество стационарных точек равно 1.

**3. Найдем частные производные второго порядка**.

4. Вычислим значение этих частных производных второго порядка в стационарных точках M(x0;y0).

Вычисляем значения для точки:

Строим матрицу Гессе:

D1 = a11 > 0, D2 = 4 > 0

В точке M1(10;2) матрица Гессе положительно определена и функция является выпуклой. Точка x1=(10;2) является точкой минимума.

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Условия Куна-Таккера](https://math.semestr.ru/optim/tucker.php)

С этой задачей также решают:

[Матрица Гессе](https://math.semestr.ru/optim/hessian.php)

[Экстремум функции двух переменных](https://math.semestr.ru/math/extremum.php)

[Частные производные](https://math.semestr.ru/math/derivatives.php)

[Градиент функции](https://math.semestr.ru/math/gradient.php)

[Поиск минимума функции методом Ньютона](https://math.semestr.ru/optim/method-newton.php)

[Метод Фибоначчи онлайн](https://math.semestr.ru/optim/fibonacci.php)

[Вычислительная математика онлайн](https://math.semestr.ru/optim/computational-mathematics.php)

[Функция Лагранжа](https://math.semestr.ru/math/lagrange.php)