**Уравнение множественной регрессии методом определителей**.

**1. Расчет коэффициентов множественной линейной регрессии**.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными b0, b1, b2:

∑yi = nb0 + b1∑x1i + b2∑x2i

∑x1iyi = b0∑x1i + b1∑x1i2 + b2∑x1ix2i

∑x2iyi = b0∑x2i + b1∑x1ix2i + b2∑x2i2

Для удобства проведения расчетов поместим результаты промежуточных расчетов в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y | X1 | X2 | X12 | X22 | X1Y | X2Y | X1X2 | Y2 |
| 84.17 | 22.7 | 74.8 | 515.29 | 5595.04 | 1910.659 | 6295.916 | 1697.96 | 7084.589 |
| 74.02 | 24.6 | 79 | 605.16 | 6241 | 1820.892 | 5847.58 | 1943.4 | 5478.96 |
| 43.7 | 24.9 | 86.8 | 620.01 | 7534.24 | 1088.13 | 3793.16 | 2161.32 | 1909.69 |
| 84.78 | 22.6 | 75.8 | 510.76 | 5745.64 | 1916.028 | 6426.324 | 1713.08 | 7187.648 |
| 48.64 | 20.8 | 74.1 | 432.64 | 5490.81 | 1011.712 | 3604.224 | 1541.28 | 2365.85 |
| 89.92 | 16.8 | 79.3 | 282.24 | 6288.49 | 1510.656 | 7130.656 | 1332.24 | 8085.606 |
| 69.87 | 18.7 | 74.1 | 349.69 | 5490.81 | 1306.569 | 5177.367 | 1385.67 | 4881.817 |
| 68.01 | 17.8 | 76.5 | 316.84 | 5852.25 | 1210.578 | 5202.765 | 1361.7 | 4625.36 |
| 43.83 | 16.6 | 85.6 | 275.56 | 7327.36 | 727.578 | 3751.848 | 1420.96 | 1921.069 |
| 88.16 | 25 | 73.8 | 625 | 5446.44 | 2204 | 6506.208 | 1845 | 7772.186 |
| 48.08 | 23.9 | 67.8 | 571.21 | 4596.84 | 1149.112 | 3259.824 | 1620.42 | 2311.686 |
| 89.31 | 23.7 | 72.1 | 561.69 | 5198.41 | 2116.647 | 6439.251 | 1708.77 | 7976.276 |
| 64.1 | 24.9 | 72.3 | 620.01 | 5227.29 | 1596.09 | 4634.43 | 1800.27 | 4108.81 |
| 62.5 | 23.7 | 74.6 | 561.69 | 5565.16 | 1481.25 | 4662.5 | 1768.02 | 3906.25 |
| 51.78 | 22.8 | 67.2 | 519.84 | 4515.84 | 1180.584 | 3479.616 | 1532.16 | 2681.168 |
| 85.36 | 20.2 | 67.1 | 408.04 | 4502.41 | 1724.272 | 5727.656 | 1355.42 | 7286.33 |
| 73.33 | 20.2 | 64 | 408.04 | 4096 | 1481.266 | 4693.12 | 1292.8 | 5377.289 |
| 92.67 | 18.7 | 57.7 | 349.69 | 3329.29 | 1732.929 | 5347.059 | 1078.99 | 8587.729 |
| 1262.23 | 388.6 | 1322.6 | 8533.4 | 98043.32 | 27168.952 | 91979.504 | 28559.46 | 93548.314 |
| 70.124 | 21.589 | 73.478 | 474.078 | 5446.851 | 1509.386 | 5109.972 | 1586.637 | 5197.129 |

Для наших данных система уравнений имеет вид:

1262.23 = 18 b0 + 388.6b1 + 1322.6b2

27168.952 = 388.6b0 + 8533.4b1 + 28559.46b2

91979.504 = 1322.6b0 + 28559.46b1 + 98043.32b2

Решая систему методом Крамера, находим:

b0 = 146.588, b1 = -0.527, b2 = -0.886

Уравнение регрессии:

Y = 146.588 -0.527 X1 -0.886 X2

Найдем средние квадратические отклонения признаков:

*Парные коэффициенты корреляции*.

Для y и x1

Для y и x2

Для x1 и x2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y | X1 | X2 |  |  |  |  |  |  |
| 84.17 | 22.7 | 74.8 | 197.293 | 1.235 | 1.748 | 15.607 | 18.572 | 1.469 |
| 74.02 | 24.6 | 79 | 15.18 | 9.067 | 30.495 | 11.732 | 21.515 | 16.628 |
| 43.7 | 24.9 | 86.8 | 698.222 | 10.963 | 177.482 | -87.492 | -352.025 | 44.111 |
| 84.78 | 22.6 | 75.8 | 214.802 | 1.022 | 5.393 | 14.819 | 34.035 | 2.348 |
| 48.64 | 20.8 | 74.1 | 461.557 | 0.622 | 0.387 | 16.948 | -13.368 | -0.491 |
| 89.92 | 16.8 | 79.3 | 391.886 | 22.933 | 33.898 | -94.801 | 115.257 | -27.882 |
| 69.87 | 18.7 | 74.1 | 0.0645 | 8.346 | 0.387 | 0.733 | -0.158 | -1.798 |
| 68.01 | 17.8 | 76.5 | 4.469 | 14.356 | 9.134 | 8.009 | -6.389 | -11.451 |
| 43.83 | 16.6 | 85.6 | 691.369 | 24.889 | 146.948 | 131.177 | -318.74 | -60.476 |
| 88.16 | 25 | 73.8 | 325.301 | 11.636 | 0.104 | 61.523 | 5.812 | 1.099 |
| 48.08 | 23.9 | 67.8 | 485.933 | 5.341 | 32.237 | -50.946 | 125.16 | -13.122 |
| 89.31 | 23.7 | 72.1 | 368.107 | 4.457 | 1.898 | 40.504 | -26.434 | -2.909 |
| 64.1 | 24.9 | 72.3 | 36.287 | 10.963 | 1.387 | -19.946 | 7.095 | -3.9 |
| 62.5 | 23.7 | 74.6 | 58.124 | 4.457 | 1.259 | -16.095 | -8.556 | 2.369 |
| 51.78 | 22.8 | 67.2 | 336.498 | 1.467 | 39.41 | -22.216 | 115.159 | -7.603 |
| 85.36 | 20.2 | 67.1 | 232.139 | 1.929 | 40.676 | -21.161 | -97.173 | 8.858 |
| 73.33 | 20.2 | 64 | 10.279 | 1.929 | 89.828 | -4.453 | -30.387 | 13.164 |
| 92.67 | 18.7 | 57.7 | 508.327 | 8.346 | 248.938 | -65.133 | -355.728 | 45.58 |
| 1262.23 | 388.6 | 1322.6 | 5035.837 | 143.958 | 861.611 | -81.191 | -766.351 | 5.996 |
| 70.124 | 21.589 | 73.478 | 279.769 | 7.998 | 47.867 | -4.511 | -42.575 | 0.333 |

**2. Анализ качества эмпирического уравнения множественной линейной регрессии**.

Построение эмпирического уравнения регрессии является начальным этапом эконометрического анализа. Первое же построенное по выборке уравнение регрессии очень редко является удовлетворительным по тем или иным характеристикам. Поэтому следующей важнейшей оценкой является проверка качества уравнения регрессии. В эконометрике принята устоявшаяся схема такой проверки, которая проводится по следующим направлениям:

• проверка статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии;

• проверка общего качества уравнения регрессии;

• проверка свойств данных, выполнимость которых предполагалась при оценивании уравнения (проверка выполнимости предпосылок МНК).

Прежде чем проводить анализ качества уравнения регрессии, необходимо определить дисперсии и стандартные ошибки коэффициентов, а также интервальные оценки коэффициентов.

При этом:

где m=2 – количество объясняющих переменных модели.

Стандартные ошибки коэффициентов:

Расчет остатков ei.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Y(X1,X2) | ei = (Yi-Y(X1,X2)) | ei2 |
| 68.367 | 15.803 | 249.734 |
| 63.645 | 10.375 | 107.635 |
| 56.578 | -12.878 | 165.846 |
| 67.534 | 17.246 | 297.426 |
| 69.989 | -21.349 | 455.761 |
| 67.491 | 22.429 | 503.062 |
| 71.095 | -1.225 | 1.502 |
| 69.444 | -1.434 | 2.056 |
| 62.016 | -18.186 | 330.731 |
| 68.04 | 20.12 | 404.796 |
| 73.935 | -25.855 | 668.477 |
| 70.232 | 19.078 | 363.989 |
| 69.422 | -5.322 | 28.322 |
| 68.017 | -5.517 | 30.438 |
| 75.046 | -23.266 | 541.316 |
| 76.505 | 8.855 | 78.407 |
| 79.251 | -5.921 | 35.06 |
| 85.622 | 7.048 | 49.672 |
| 1262.23 | 0 | 4314.228 |

Для определения размеров погрешности или точности прогноза показателя Y рассчитаем коэффициент несоответствия Тейла по формуле:

Этот показатель изменяется от 0 до 1. Чем ближе его значение к нулю, тем лучше результаты прогнозирования.

**6. Оценка значимости коэффициентов регрессии с помощью t-критерия Стьюдента**.

Оценка значимости коэффициентов регрессии b1 и b2 производится с помощью t-критерия Стьюдента и связана с сопоставлением их значений с величиной случайных ошибок mb1 и mb2. Более простым способом расчета фактических значений tb1 и tb2 является их определение через критерии F:

Проверим гипотезу H0 о равенстве отдельных коэффициентов регрессии нулю (при альтернативе H1 не равно) на уровне значимости α=0.05.

tкрит (n-m-1;α/2) = (15;0.025) = 2.49

Поскольку 2.818 > 2.49, то статистическая значимость коэффициента регрессии b0 подтверждается (отвергаем гипотезу о равенстве нулю этого коэффициента).

Поскольку 0.373 < 2.49, то статистическая значимость коэффициента регрессии b1 не подтверждается (принимаем гипотезу о равенстве нулю этого коэффициента).

Поскольку 1.533 < 2.49, то статистическая значимость коэффициента регрессии b2 не подтверждается (принимаем гипотезу о равенстве нулю этого коэффициента).

**Доверительный интервал для коэффициентов уравнения регрессии**.

Определим доверительные интервалы коэффициентов регрессии, которые с надежность 95% будут следующими:

(bj - tкрит∙Sb j; bj + tкрит∙Sbj)

(146.59 - 2.49 ∙ 52.02; 146.59 + 2.49∙52.02)

(17.06;276.12)

С вероятностью 95% можно утверждать, что значение данного параметра b0 будут лежать в найденном интервале.

(-0.53 - 2.49 ∙ 1.41; -0.53 + 2.49∙1.41)

(-4.05;2.99)

С вероятностью 95% можно утверждать, что значение данного параметра b1 будут лежать в найденном интервале.

(-0.89 - 2.49 ∙ 0.58; -0.89 + 2.49∙0.58)

(-2.32;0.55)

С вероятностью 95% можно утверждать, что значение данного параметра b2 будут лежать в найденном интервале.

**7. Проверка гипотезы о статистической значимости уравнения регрессии**.

Проверка гипотезы H0 о статистической значимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи (R2 = 0) производится по F-критерию Фишера сравнением Fфакт с Fтабл.

Проверка значимости модели регрессии проводится с использованием F-критерия Фишера, расчетное значение которого находится как отношение дисперсии исходного ряда наблюдений изучаемого показателя и несмещенной оценки дисперсии остаточной последовательности для данной модели.

Если расчетное значение с k1=(m) и k2=(n-m-1) степенями свободы больше табличного при заданном уровне значимости, то модель считается значимой.

R2 = 0.143

Оценка статистической значимости парной линейной регрессии производится по следующему алгоритму:

1. Выдвигается нулевая гипотеза о том, что уравнение в целом статистически незначимо: H0: R2=0 на уровне значимости α.

2. Далее определяют фактическое значение F-критерия:

где m=2 для множественной регрессии с двумя факторами.

3. Табличное значение определяется по таблицам распределения Фишера для заданного уровня значимости, принимая во внимание, что число степеней свободы для общей суммы квадратов (большей дисперсии) равно 2 и число степеней свободы остаточной суммы квадратов (меньшей дисперсии) при линейной регрессии равно n-2-1.

4. Если фактическое значение F-критерия меньше табличного, то говорят, что нет основания отклонять нулевую гипотезу.

В противном случае, нулевая гипотеза отклоняется и с вероятностью (1-α) принимается альтернативная гипотеза о статистической значимости уравнения в целом.

Табличное значение критерия со степенями свободы k1=2 и k2=15, Fkp = 3.6823

Поскольку фактическое значение F < Fkp, то коэффициент детерминации статистически не значим (найденная оценка уравнения регрессии статистически не надежна).

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Уравнение множественной регрессии](https://math.semestr.ru/regress/mregress.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Уравнение парной линейной регрессии](https://math.semestr.ru/corel/corel.php)

[Выявление тренда методом аналитического выравнивания](https://math.semestr.ru/trend/analis.php)

[Уравнение нелинейной регрессии](https://math.semestr.ru/corel/noncorel.php)

[Проверка на автокорреляцию](https://math.semestr.ru/corel/autocorrelation.php)

[Системы эконометрических уравнений](https://math.semestr.ru/regress/systems.php)

[Метод статистических уравнений зависимостей](https://math.semestr.ru/regress/system.php)