**Решение**.

**Расчет сроков свершения событий.**

Для i=1 (начального события), очевидно tp(1)=0.

i=2: tp(2) = tp(1) + t(1,2) = 0 + 11 = 11.

i=3: tp(3) = tp(1) + t(1,3) = 0 + 15 = 15.

i=4: tp(4) = tp(2) + t(2,4) = 11 + 4 = 15.

i=5: tp(5) = tp(2) + t(2,5) = 11 + 4 = 15.

i=6: tp(6) = tp(4) + t(4,6) = 15 + 9 = 24.

i=7: max(tp(3) + t(3,7);tp(4) + t(4,7)) = max(15 + 5;15 + 5) = 20.

i=8: max(tp(3) + t(3,8);tp(4) + t(4,8)) = max(15 + 10;15 + 10) = 25.

i=9: max(tp(5) + t(5,9);tp(6) + t(6,9);tp(7) + t(7,9)) = max(15 + 7;24 + 7;20 + 7) = 31.

i=10: max(tp(3) + t(3,10);tp(4) + t(4,10)) = max(15 + 20;15 + 20) = 35.

i=11: max(tp(5) + t(5,11);tp(6) + t(6,11);tp(7) + t(7,11);tp(10) + t(10,11)) = max(15 + 9;24 + 9;20 + 9;35 + 0) = 35.

i=12: max(tp(8) + t(8,12);tp(9) + t(9,12);tp(11) + t(11,12)) = max(25 + 4;31 + 4;35 + 0) = 35.

Длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 12: tkp=tp(12)=35

При определении поздних сроков свершения событий tп(i) двигаемся по сети в обратном направлении, то есть справа налево и используем формулы (3), (4).

Для i=12 (завершающего события) поздний срок свершения события должен равняться его раннему сроку (иначе изменится длина критического пути): tп(12)= tр(12)=35

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 11. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 11.

i=11: tп(11) = tп(12) - t(11,12) = 35 - 0 = 35.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 9. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 9.

i=9: tп(9) = tп(12) - t(9,12) = 35 - 4 = 31.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 10. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 10.

i=10: tп(10) = tп(11) - t(10,11) = 35 - 0 = 35.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 8. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 8.

i=8: tп(8) = tп(12) - t(8,12) = 35 - 4 = 31.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 7. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 7.

i=7: min(tп(9) - t(7,9);tп(11) - t(7,11)) = min(31 - 7;35 - 9) = 24.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 6. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 6.

i=6: min(tп(9) - t(6,9);tп(11) - t(6,11)) = min(31 - 7;35 - 9) = 24.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 5. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 5.

i=5: min(tп(9) - t(5,9);tп(11) - t(5,11)) = min(31 - 7;35 - 9) = 24.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 4. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 4.

i=4: min(tп(6) - t(4,6);tп(7) - t(4,7);tп(8) - t(4,8);tп(10) - t(4,10)) = min(24 - 9;24 - 5;31 - 10;35 - 20) = 15.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 3. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 3.

i=3: min(tп(7) - t(3,7);tп(8) - t(3,8);tп(10) - t(3,10)) = min(24 - 5;31 - 10;35 - 20) = 15.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 2. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 2.

i=2: min(tп(4) - t(2,4);tп(5) - t(2,5)) = min(15 - 4;24 - 4) = 11.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 1. Просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 1.

i=1: min(tп(2) - t(1,2);tп(3) - t(1,3)) = min(11 - 11;15 - 15) = 0.

Таблица 1 - Расчет резерва событий

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер события | Сроки свершения события: ранний tp(i) | Сроки свершения события: поздний tп(i) | Резерв времени, R(i) |
| 1 |   | 0 | 0 |
| 2 | 11 | 11 | 0 |
| 3 | 15 | 15 | 0 |
| 4 | 15 | 15 | 0 |
| 5 | 15 | 24 | 9 |
| 6 | 24 | 24 | 0 |
| 7 | 20 | 24 | 4 |
| 8 | 25 | 31 | 6 |
| 9 | 31 | 31 | 0 |
| 10 | 35 | 35 | 0 |
| 11 | 35 | 35 | 0 |
| 12 | 35 | 35 | 0 |

Заполнение таблицы 2.

Перечень работ и их продолжительность перенесем во вторую и третью графы. При этом работы следует записывать в графу 2 последовательно: сначала начиная с номера 1, затем с номера 2 и т.д.

Во второй графе поставим число, характеризующее количество непосредственно предшествующих работ (КПР) тому событию, с которого начинается рассматриваемая работа.

Так, для работы (7,9) в графу 1 поставим число 2, т.к. на номер 7 оканчиваются 2 работы: (3,7),(4,7).

Графу 4 получаем из таблицы 1 (tp(i)). Графу 7 получаем из таблицы 1 (tп(i)).

Значения в графе 5 получаются в результате суммирования граф 3 и 4.

В графе 6 позднее начало работы определяется как разность позднего окончания этих работ и их продолжительности (из значений графы 7 вычитаются данные графы 3);

Содержимое графы 8 (полный резерв времени R(ij)) равно разности граф 6 и 4 или граф 7 и 5. Если R(ij) равен нулю, то работа является критической

Полный резерв пути показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ, принадлежащих данному пути, при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится. Образовывается, когда предшествующие работы закончатся в свой наиболее ранний срок.

Находим полный резерв RПi-j = Tпj-ti-j-Tрi

RП(1,2) = 11-11-0 = 0

RП(1,3) = 15-15-0 = 0

RП(2,4) = 15-4-11 = 0

RП(2,5) = 24-4-11 = 9

RП(3,7) = 24-5-15 = 4

RП(3,8) = 31-10-15 = 6

RП(3,10) = 35-20-15 = 0

RП(4,6) = 24-9-15 = 0

RП(4,7) = 24-5-15 = 4

RП(4,8) = 31-10-15 = 6

RП(4,10) = 35-20-15 = 0

RП(5,9) = 31-7-15 = 9

RП(5,11) = 35-9-15 = 11

RП(6,9) = 31-7-24 = 0

RП(6,11) = 35-9-24 = 2

RП(7,9) = 31-7-20 = 4

RП(7,11) = 35-9-20 = 6

RП(8,12) = 35-4-25 = 6

RП(9,12) = 35-4-31 = 0

RП(10,11) = 35-0-35 = 0

RП(11,12) = 35-0-35 = 0

Свободный резерв времени также можно найти и по формуле RCi-j = Tпi-ti-j-Tрi

RC(1,2) = 11-11-0 = 0

RC(1,3) = 15-15-0 = 0

RC(2,4) = 15-4-11 = 0

RC(2,5) = 15-4-11 = 0

RC(3,7) = 20-5-15 = 0

RC(3,8) = 25-10-15 = 0

RC(3,10) = 35-20-15 = 0

RC(4,6) = 24-9-15 = 0

RC(4,7) = 20-5-15 = 0

RC(4,8) = 25-10-15 = 0

RC(4,10) = 35-20-15 = 0

RC(5,9) = 31-7-15 = 9

RC(5,11) = 35-9-15 = 11

RC(6,9) = 31-7-24 = 0

RC(6,11) = 35-9-24 = 2

RC(7,9) = 31-7-20 = 4

RC(7,11) = 35-9-20 = 6

RC(8,12) = 35-4-25 = 6

RC(9,12) = 35-4-31 = 0

RC(10,11) = 35-0-35 = 0

RC(11,12) = 35-0-35 = 0

Независимый резерв времени также можно найти и по формуле RНi-j = Tрj-ti-j-Tпi

RН(1,2) = 11-11-0 = 0

RН(1,3) = 15-15-0 = 0

RН(2,4) = 15-4-11 = 0

RН(2,5) = 15-4-11 = 0

RН(3,7) = 20-5-15 = 0

RН(3,8) = 25-10-15 = 0

RН(3,10) = 35-20-15 = 0

RН(4,6) = 24-9-15 = 0

RН(4,7) = 20-5-15 = 0

RН(4,8) = 25-10-15 = 0

RН(4,10) = 35-20-15 = 0

RН(5,9) = 31-7-24 = 0

RН(5,11) = 35-9-24 = 2

RН(6,9) = 31-7-24 = 0

RН(6,11) = 35-9-24 = 2

RН(7,9) = 31-7-24 = 0

RН(7,11) = 35-9-24 = 2

RН(8,12) = 35-4-31 = 0

RН(9,12) = 35-4-31 = 0

RН(10,11) = 35-0-35 = 0

RН(11,12) = 35-0-35 = 0

Таблица 2 - Анализ сетевой модели по времени

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа (i,j) | Количество предшествующих работ | Продолжительность tij | Ранние сроки: начало tijР.Н. | Ранние сроки: окончание tijР.О. | Поздние сроки: начало tijП.Н. | Поздние сроки: окончание tijП.О. | Резервы времени: полный RijП | Независимый резерв времени RijН | Частный резерв I рода, Rij1 | Частный резерв II рода, RijC |
| (1,2) | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (1,3) | 0 | 15 | 0 | 15 | 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2,4) | 1 | 4 | 11 | 15 | 11 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2,5) | 1 | 4 | 11 | 15 | 20 | 24 | 9 | 0 | 9 | 0 |
| (3,7) | 1 | 5 | 15 | 20 | 19 | 24 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| (3,8) | 1 | 10 | 15 | 25 | 21 | 31 | 6 | 0 | 6 | 0 |
| (3,10) | 1 | 20 | 15 | 35 | 15 | 35 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (4,6) | 1 | 9 | 15 | 24 | 15 | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (4,7) | 1 | 5 | 15 | 20 | 19 | 24 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| (4,8) | 1 | 10 | 15 | 25 | 21 | 31 | 6 | 0 | 6 | 0 |
| (4,10) | 1 | 20 | 15 | 35 | 15 | 35 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (5,9) | 1 | 7 | 15 | 22 | 24 | 31 | 9 | 0 | 0 | 9 |
| (5,11) | 1 | 9 | 15 | 24 | 26 | 35 | 11 | 2 | 2 | 11 |
| (6,9) | 1 | 7 | 24 | 31 | 24 | 31 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (6,11) | 1 | 9 | 24 | 33 | 26 | 35 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| (7,9) | 2 | 7 | 20 | 27 | 24 | 31 | 4 | 0 | 0 | 4 |
| (7,11) | 2 | 9 | 20 | 29 | 26 | 35 | 6 | 2 | 2 | 6 |
| (8,12) | 2 | 4 | 25 | 29 | 31 | 35 | 6 | 0 | 0 | 6 |
| (9,12) | 3 | 4 | 31 | 35 | 31 | 35 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (10,11) | 2 | 0 | 35 | 35 | 35 | 35 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (11,12) | 4 | 0 | 35 | 35 | 35 | 35 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Следует отметить, что кроме полного резерва времени работы, выделяют еще три разновидности резервов. Частный резерв времени первого вида R1 - часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события. R1 находится по формуле:

R(i,j)= Rп(i,j) - R(i)

Частный резерв времени второго вида, или свободный резерв времени Rc работы (i,j) представляет собой часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Rc находится по формуле:

R(i,j)= Rп(i,j) - R(j)

Значение свободного резерва времени работы указывает на расположение резервов, необходимых для оптимизации.

Независимый резерв времени Rн работы (i,j) - часть полного резерва, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие начинаются в ранние сроки. Rн находится по формуле:

R(i,j)= Rп(i,j)- R(i) - R(j)

В данном случае имеются несколько критических путей:

Критический путь №1:(1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12)

Критический путь №2:(1,3)(3,10)(10,11)(11,12)

Критический путь №3:(1,2)(2,4)(4,10)(10,11)(11,12)

**Продолжительность критического пути: 35**

**Анализ сетевого графика**

Сложность сетевого графика оценивается **коэффициентом сложности**, который определяется по формуле:

Kc = npab / ncob

где Kc – коэффициент сложности сетевого графика; npab – количество работ, ед.; ncob – количество событий, ед.

Сетевые графики, имеющие коэффициент сложности от 1,0 до 1,5, являются простыми, от 1,51 до 2,0 – средней сложности, более 2,1 – сложными.

Kc = 19 / 12 = 1.58

Поскольку 1.51 < Kc < 2, то сетевой график является средней сложности.

**Коэффициентом напряженности** КH работы Pi,j называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь:

где t(Lmax) – продолжительность максимального пути, проходящего через работу Pi,j, от начала до конца сетевого графика; tkp – продолжительность (длина) критического пути; t1kp – продолжительность отрезка рассматриваемого максимального пути, совпадающего с критическим путем.

Коэффициент напряженности КH работы Pi,j может изменяться в пределах от 0 (для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ нулевой продолжительности) до 1 (для работ критического пути). Чем ближе к 1 коэффициент напряженности КH работы Pi,j, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе Кн работы Pi,j к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа | Путь | Максимальный путь, t(Lmax) | Совпадающие работы | t1kp | Расчет | КH |
| (1,2) | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | - | - |
| (1,3) | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | - | - |
| (2,4) | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | - | - |
| (2,5) | (1,2)(2,5)(5,9)(9,12) | 26 | (1,2)(9,12) | 15 | (26-15)/(35-15) | 0.55 |
| (3,7) | (1,3)(3,7)(7,9)(9,12) | 31 | (1,3)(9,12) | 19 | (31-19)/(35-19) | 0.75 |
| (3,8) | (1,3)(3,8)(8,12) | 29 | (1,3) | 15 | (29-15)/(35-15) | 0.7 |
| (3,10) | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | - | - |
| (4,6) | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | - | - |
| (4,7) | (1,2)(2,4)(4,7)(7,9)(9,12) | 31 | (1,2)(2,4)(9,12) | 19 | (31-19)/(35-19) | 0.75 |
| (4,8) | (1,2)(2,4)(4,8)(8,12) | 29 | (1,2)(2,4) | 15 | (29-15)/(35-15) | 0.7 |
| (4,10) | (1,2)(2,4)(4,10)(10,11)(11,12) | 35 | (1,2)(2,4)(4,10)(10,11)(11,12) | 35 | - | - |
| (5,9) | (1,2)(2,5)(5,9)(9,12) | 26 | (1,2)(9,12) | 15 | (26-15)/(35-15) | 0.55 |
| (5,11) | (1,2)(2,5)(5,11)(11,12) | 24 | (1,2)(11,12) | 11 | (24-11)/(35-11) | 0.542 |
| (6,9) | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | - | - |
| (6,11) | (1,2)(2,4)(4,6)(6,11)(11,12) | 33 | (1,2)(2,4)(4,6)(11,12) | 24 | (33-24)/(35-24) | 0.818 |
| (7,9) | (1,3)(3,7)(7,9)(9,12) | 31 | (1,3)(9,12) | 19 | (31-19)/(35-19) | 0.75 |
| (7,11) | (1,3)(3,7)(7,11)(11,12) | 29 | (1,3)(11,12) | 15 | (29-15)/(35-15) | 0.7 |
| (8,12) | (1,3)(3,8)(8,12) | 29 | (1,3) | 15 | (29-15)/(35-15) | 0.7 |
| (9,12) | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | (1,2)(2,4)(4,6)(6,9)(9,12) | 35 | - | - |
| (10,11) | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | - | - |
| (11,12) | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | (1,3)(3,10)(10,11)(11,12) | 35 | - | - |

Вычисленные коэффициенты напряженности позволяют дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины Кн выделяют три зоны: критическую (Кн > 0,8); подкритическую (0,6 < Кн < 0,8); резервную (Кн < 0,6).

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Параметры сетевой модели](https://math.semestr.ru/setm/index.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Теория игр](https://math.semestr.ru/games/games_manual.php)

[Теория массового обслуживания онлайн](https://math.semestr.ru/cmo/cmo_manual.php)

[Задачи линейного программирования](https://math.semestr.ru/simplex/simplex_manual.php)

[Транспортные задачи](https://math.semestr.ru/transp/transp_manual.php)

[Задачи динамического программирования](https://math.semestr.ru/dinam/dinam_manual.php)