F1(X)=x1+2x2

F2(X)=4x1+x2

d1=0

x1+2x2≤6

x1≥1

x1-x2≤4

x1+3x2≥-3

Этап №1.

На первом этапе оптимизируем первую целевую функцию.

x1 + 2x2→max

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Поскольку в правой части присутствуют отрицательные значения, умножим соответствующие строки на (-1).

Определим максимальное значение целевой функции F(X) = x1+2x2 при следующих условиях-ограничений.

x1+2x2≤6

x1≥1

x1-x2≤4

-x1-3x2≤3

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

x1+2x2+x3 = 6

x1-x4 = 1

x1-x2+x5 = 4

-x1-3x2+x6 = 3

Расширенная матрица системы ограничений-равенств данной задачи:

$$\left|\begin{matrix}1&2&1&0&0&0&6\\1&0&0&-1&0&0&1\\1&-1&0&0&1&0&4\\-1&-3&0&0&0&1&3\end{matrix}\right|$$

Приведем систему к единичной матрице методом жордановских преобразований.

1. В качестве базовой переменной можно выбрать x3.

2. В качестве базовой переменной можно выбрать x4.

Получаем новую матрицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

3. В качестве базовой переменной можно выбрать x5.

4. В качестве базовой переменной можно выбрать x6.

Поскольку в системе имеется единичная матрица, то в качестве базисных переменных принимаем X = (3,4,5,6).

Выразим базисные переменные через остальные:

x3 = -x1-2x2+6

x4 = x1-1

x5 = -x1+x2+4

x6 = x1+3x2+3

Подставим их в целевую функцию:

F(X) = x1+2x2

Среди свободных членов bi имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x4 следует ввести переменную x1.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 5 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| x5 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x6 | 4 | 0 | -3 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| F(X0) | -1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 6-(-1∙1):-1 | 1-(-1∙1):-1 | 2-(0∙1):-1 | 1-(0∙1):-1 | 0-(1∙1):-1 | 0-(0∙1):-1 | 0-(0∙1):-1 |
| -1 : -1 | -1 : -1 | 0 : -1 | 0 : -1 | 1 : -1 | 0 : -1 | 0 : -1 |
| 4-(-1∙1):-1 | 1-(-1∙1):-1 | -1-(0∙1):-1 | 0-(0∙1):-1 | 0-(1∙1):-1 | 1-(0∙1):-1 | 0-(0∙1):-1 |
| 3-(-1∙-1):-1 | -1-(-1∙-1):-1 | -3-(0∙-1):-1 | 0-(0∙-1):-1 | 0-(1∙-1):-1 | 0-(0∙-1):-1 | 1-(0∙-1):-1 |

Выразим базисные переменные через остальные:

x3 = -2x2-x4+5

x1 = x4+1

x5 = x2-x4+3

x6 = 3x2+x4+4

Подставим их в целевую функцию:

F(X) = (x4+1)+2x2

или

F(X) = 2x2+x4+1

2x2+x3+x4=5

x1-x4=1

-x2+x4+x5=3

-3x2-x4+x6=4

При вычислениях значение Fc = 1 временно не учитываем.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x3, x1, x5, x6

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X0 = (1,0,5,0,3,4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 5 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| x5 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x6 | 4 | 0 | -3 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| F(X0) | 0 | 0 | -2 | 0 | -1 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai2

и из них выберем наименьшее:

min (5 : 2 , - , - , - ) = 5/2

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x3 | 5 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5/2 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | - |
| x5 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | - |
| x6 | 4 | 0 | -3 | 0 | -1 | 0 | 1 | - |
| F(X1) | 0 | 0 | -2 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x3 в план 1 войдет переменная x2.

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 5/2 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| x5 | 11/2 | 0 | 0 | 1/2 | 3/2 | 1 | 0 |
| x6 | 23/2 | 0 | 0 | 3/2 | 1/2 | 0 | 1 |
| F(X1) | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Конец итераций: индексная строка не содержит отрицательных элементов - найден оптимальный план

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 5/2 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| x5 | 11/2 | 0 | 0 | 1/2 | 3/2 | 1 | 0 |
| x6 | 23/2 | 0 | 0 | 3/2 | 1/2 | 0 | 1 |
| F(X2) | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 1, x2 = 5/2

F(X) = 1∙1 + 2∙5/2 = 6

Результат: x1=1, x2=5/2, Z1=5

Этап №2.

На втором этапе оптимизируется вторая целевая функция.

На этом этапе предыдущую функцию можно ухудшить на величину не более, чем d1=0. По этой причине, на 2-м шаге, значение Z1 может быть не меньшее, чем 5-0=5.

4x1 + x2→min

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Поскольку в правой части присутствуют отрицательные значения, умножим соответствующие строки на (-1).

Определим минимальное значение целевой функции F(X) = 4x1+x2 при следующих условиях-ограничений.

x1+2x2≤6

x1≥1

x1-x2≤4

-x1-3x2≤3

x1+2x2≥5

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

x1+2x2+x3 = 6

x1-x4 = 1

x1-x2+x5 = 4

-x1-3x2+x6 = 3

x1+2x2-x7 = 5

Расширенная матрица системы ограничений-равенств данной задачи:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5 |

Приведем систему к единичной матрице методом жордановских преобразований.

1. В качестве базовой переменной можно выбрать x3.

2. В качестве базовой переменной можно выбрать x4.

Получаем новую матрицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5 |

3. В качестве базовой переменной можно выбрать x5.

4. В качестве базовой переменной можно выбрать x6.

5. В качестве базовой переменной можно выбрать x7.

Получаем новую матрицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -5 |

Поскольку в системе имеется единичная матрица, то в качестве базисных переменных принимаем X = (3,4,5,6,7).

Выразим базисные переменные через остальные:

x3 = -x1-2x2+6

x4 = x1-1

x5 = -x1+x2+4

x6 = x1+3x2+3

x7 = x1+2x2-5

Подставим их в целевую функцию:

F(X) = 4x1+x2

Среди свободных членов bi имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x7 следует ввести переменную x2.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x4 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 13/2 | 3/2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1/2 |
| x6 | 21/2 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3/2 |
| x2 | 5/2 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1/2 |
| F(X0) | -5/2 | 7/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 |

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| 6-(-5∙2):-2 | 1-(-1∙2):-2 | 2-(-2∙2):-2 | 1-(0∙2):-2 | 0-(0∙2):-2 | 0-(0∙2):-2 | 0-(0∙2):-2 | 0-(1∙2):-2 |
| -1-(-5∙0):-2 | -1-(-1∙0):-2 | 0-(-2∙0):-2 | 0-(0∙0):-2 | 1-(0∙0):-2 | 0-(0∙0):-2 | 0-(0∙0):-2 | 0-(1∙0):-2 |
| 4-(-5∙-1):-2 | 1-(-1∙-1):-2 | -1-(-2∙-1):-2 | 0-(0∙-1):-2 | 0-(0∙-1):-2 | 1-(0∙-1):-2 | 0-(0∙-1):-2 | 0-(1∙-1):-2 |
| 3-(-5∙-3):-2 | -1-(-1∙-3):-2 | -3-(-2∙-3):-2 | 0-(0∙-3):-2 | 0-(0∙-3):-2 | 0-(0∙-3):-2 | 1-(0∙-3):-2 | 0-(1∙-3):-2 |
| -5 : -2 | -1 : -2 | -2 : -2 | 0 : -2 | 0 : -2 | 0 : -2 | 0 : -2 | 1 : -2 |

Среди свободных членов bi имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x4 следует ввести переменную x1.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | 0 | -1/2 |
| x6 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | -3/2 |
| x2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | -1/2 |
| F(X1) | -6 | 0 | 0 | 0 | 7/2 | 0 | 0 | 1/2 |

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| 1-(-1∙0):-1 | 0-(-1∙0):-1 | 0-(0∙0):-1 | 1-(0∙0):-1 | 0-(1∙0):-1 | 0-(0∙0):-1 | 0-(0∙0):-1 | 1-(0∙0):-1 |
| -1 : -1 | -1 : -1 | 0 : -1 | 0 : -1 | 1 : -1 | 0 : -1 | 0 : -1 | 0 : -1 |
| 13/2-(-1∙3/2):-1 | 3/2-(-1∙3/2):-1 | 0-(0∙3/2):-1 | 0-(0∙3/2):-1 | 0-(1∙3/2):-1 | 1-(0∙3/2):-1 | 0-(0∙3/2):-1 | -1/2-(0∙3/2):-1 |
| 21/2-(-1∙1/2):-1 | 1/2-(-1∙1/2):-1 | 0-(0∙1/2):-1 | 0-(0∙1/2):-1 | 0-(1∙1/2):-1 | 0-(0∙1/2):-1 | 1-(0∙1/2):-1 | -3/2-(0∙1/2):-1 |
| 5/2-(-1∙1/2):-1 | 1/2-(-1∙1/2):-1 | 1-(0∙1/2):-1 | 0-(0∙1/2):-1 | 0-(1∙1/2):-1 | 0-(0∙1/2):-1 | 0-(0∙1/2):-1 | -1/2-(0∙1/2):-1 |

Выразим базисные переменные через остальные:

x3 = -x7+1

x1 = x4+1

x5 = -3/2x4+1/2x7+5

x6 = -1/2x4+3/2x7+10

x2 = -1/2x4+1/2x7+2

Подставим их в целевую функцию:

F(X) = 4(x4+1)+(-1/2x4+1/2x7+2)

или

F(X) = 7/2x4+1/2x7+6

x3+x7=1

x1-x4=1

3/2x4+x5-1/2x7=5

1/2x4+x6-3/2x7=10

x2+1/2x4-1/2x7=2

При вычислениях значение Fc = 6 временно не учитываем.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x3, x1, x5, x6, x2

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X0 = (1,2,1,0,5,10,0)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | 0 | -1/2 |
| x6 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | -3/2 |
| x2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | -1/2 |
| F(X0) | 0 | 0 | 0 | 0 | -7/2 | 0 | 0 | -1/2 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Конец итераций: индексная строка не содержит положительных элементов - найден оптимальный план

Среди значений индексной строки нет положительных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | 0 | -1/2 |
| x6 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | -3/2 |
| x2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | -1/2 |
| F(X1) | 0 | 0 | 0 | 0 | -7/2 | 0 | 0 | -1/2 |

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 1, x2 = 2

F(X) = 4∙1 + 1∙2 = 6

Оптимальный план можно записать так: x1=1, x2=2, Z2=0, Z1=5

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Метод последовательных уступок](https://math.semestr.ru/simplex/concessions.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Решение симплекс-методом](https://math.semestr.ru/simplex/simplex.php)

[Графический метод решения задач линейного программирования](https://math.semestr.ru/lp/index.php)

[Двойственный симплекс-метод](https://math.semestr.ru/simplex/pmethod.php)

[Двойственная задача линейного программирования](https://math.semestr.ru/simplex/msimplex.php)

[Метод Гомори](https://math.semestr.ru/simplex/integer.php)

[Транспортная задача](https://math.semestr.ru/transp/index.php)

[Расчет сетевого графика](https://math.semestr.ru/setm/index.php)