**Двойственная задача линейного программирования**.

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции F(X) = 40x1+50x2+80x3 при следующих условиях-ограничений.

3x1+x2+2x3≤350

2x1+3x2+4x3≤250

x1+2x2+6x3≤500

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x4. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x5. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x6.

3x1+x2+2x3+x4 = 350

2x1+3x2+4x3+x5 = 250

x1+2x2+6x3+x6 = 500

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

**Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x4, x5, x6

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X0 = (0,0,0,350,250,500)

**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 350 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 250 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| x6 | 500 | 1 | 2 | 6 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | 0 | -40 | -50 | -80 | 0 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x3, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai3

и из них выберем наименьшее:

min (350 : 2 , 250 : 4 , 500 : 6 ) = 125/2

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (4) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x4 | 350 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 175 |
| x5 | 250 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 0 | 125/2 |
| x6 | 500 | 1 | 2 | 6 | 0 | 0 | 1 | 250/3 |
| F(X1) | 0 | -40 | -50 | -80 | 0 | 0 | 0 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x5 в план 1 войдет переменная x3.

Строка, соответствующая переменной x3 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x5 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=4. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x3 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x3 и столбец x3. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А∙В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (4), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 350-(250∙2):4 | 3-(2∙2):4 | 1-(3∙2):4 | 2-(4∙2):4 | 1-(0∙2):4 | 0-(1∙2):4 | 0-(0∙2):4 |
| 250 : 4 | 2 : 4 | 3 : 4 | 4 : 4 | 0 : 4 | 1 : 4 | 0 : 4 |
| 500-(250∙6):4 | 1-(2∙6):4 | 2-(3∙6):4 | 6-(4∙6):4 | 0-(0∙6):4 | 0-(1∙6):4 | 1-(0∙6):4 |
| 0-(250∙-80):4 | -40-(2∙-80):4 | -50-(3∙-80):4 | -80-(4∙-80):4 | 0-(0∙-80):4 | 0-(1∙-80):4 | 0-(0∙-80):4 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 225 | 2 | -1/2 | 0 | 1 | -1/2 | 0 |
| x3 | 125/2 | 1/2 | 3/4 | 1 | 0 | 1/4 | 0 |
| x6 | 125 | -2 | -5/2 | 0 | 0 | -3/2 | 1 |
| F(X1) | 5000 | 0 | 10 | 0 | 0 | 20 | 0 |

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 225 | 2 | -1/2 | 0 | 1 | -1/2 | 0 |
| x3 | 125/2 | 1/2 | 3/4 | 1 | 0 | 1/4 | 0 |
| x6 | 125 | -2 | -5/2 | 0 | 0 | -3/2 | 1 |
| F(X2) | 5000 | 0 | 10 | 0 | 0 | 20 | 0 |

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 0, x2 = 0, x3 = 125/2

F(X) = 40∙0 + 50∙0 + 80∙125/2 = 5000

**Анализ оптимального плана**.

В оптимальный план вошла дополнительная переменная x4. Следовательно, при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы 1-го вида в количестве 225.

В оптимальный план вошла дополнительная переменная x6. Следовательно, при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы 3-го вида в количестве 125.

Значение *0* в столбце x1 означает, что использование x1 - выгодно.

В индексной строке в 1-ом столбце нулевое значение. В столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент. Следовательно, задача имеет множество оптимальных планов.

Покажем это на примере. Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, вносим в базис (вместо x4), выполнив соответствующие этапы алгоритма.

После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 225/2 | 1 | -1/4 | 0 | 1/2 | -1/4 | 0 |
| x3 | 25/4 | 0 | 7/8 | 1 | -1/4 | 3/8 | 0 |
| x6 | 350 | 0 | -3 | 0 | 1 | -2 | 1 |
| F(X ) | 5000 | 0 | 10 | 0 | 0 | 20 | 0 |

В результате получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.

Значение 10> 0 в столбце x2 означает, что использование x2 - не выгодно.

Значение *0* в столбце x3 означает, что использование x3 - выгодно.

Общее решение запишем как выпуклую линейную комбинацию опорных решений (λi≥0):

Xопт=λ1(0;0;125/2)+λ2(225/2;0;25/4)=(225/2λ2;0;125/2λ1 + 25/4λ2)

Значение 0 в столбце x4 означает, что теневая цена (двойственная оценка) равна y1=0.

Значение 20 в столбце x5 означает, что теневая цена (двойственная оценка) равна y2=20.

Значение 0 в столбце x6 означает, что теневая цена (двойственная оценка) равна y3=0.

**Примечание**:

**1. По какому методу пересчитываются симплекс-таблицы?**

Используется правило прямоугольника (метод жордановских преобразований).

**2. Обязательно ли каждый раз выбирать максимальное значение из индексной строки?**

Можно не выбирать, но это может привести к зацикливанию алгоритма.

**3. В индексной строке в n-ом столбце нулевое значение. Что это означает?**

Нулевые значения должны соответствовать переменным, вошедшим в базис. Если в индексной строке симплексной таблицы оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, **не вошедшей** в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет множество оптимальных планов.

Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.

Построим **двойственную задачу** по следующим правилам.

1. Количество переменных в двойственной задаче равно количеству неравенств в исходной.

2. Матрица коэффициентов двойственной задачи является транспонированной к матрице коэффициентов исходной.

3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.

Столбец свободных членов исходной задачи является строкой коэффициентов для целевой функции двойственной. Целевая функция в одной задаче максимизируется, в другой минимизируется.

Расширенная матрица A.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | 1 | 2 | 350 |
| 2 | 3 | 4 | 250 |
| 1 | 2 | 6 | 500 |
| 40 | 50 | 80 |   |

Транспонированная матрица AT.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | 2 | 1 | 40 |
| 1 | 3 | 2 | 50 |
| 2 | 4 | 6 | 80 |
| 350 | 250 | 500 |   |

Условиям неотрицательности переменных исходной задачи соответствуют неравенства-ограничения двойственной, направленные в другую сторону. И наоборот, неравенствам-ограничениям в исходной соответствуют условия неотрицательности в двойственной.

Неравенства, соединенные стрелочками (↔), называются **сопряженными**.

3y1+2y2+y3≥40

y1+3y2+2y3≥50

2y1+4y2+6y3≥80

350y1+250y2+500y3 → min

y1 ≥ 0

y2 ≥ 0

y3 ≥ 0

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Исходная задача I |   | Двойственная задача II |
| x1 ≥ 0 | ↔ | 3y1+2y2+y3≥40 |
| x2 ≥ 0 | ↔ | y1+3y2+2y3≥50 |
| x3 ≥ 0 | ↔ | 2y1+4y2+6y3≥80 |
| 40x1+50x2+80x3 → max | ↔ | 350y1+250y2+500y3 → min |
| 3x1+x2+2x3≤350 | ↔ | y1 ≥ 0 |
| 2x1+3x2+4x3≤250 | ↔ | y2 ≥ 0 |
| x1+2x2+6x3≤500 | ↔ | y3 ≥ 0 |

Решение двойственной задачи дает оптимальную систему оценок ресурсов.

Используя последнюю итерацию прямой задачи найдем, оптимальный план двойственной задачи.

y1=0, y2=20, y3=0

Это же решение можно получить, применив теоремы двойственности.

Из теоремы двойственности следует, что Y = C∙A-1.

Составим матрицу A из компонентов векторов, входящих в оптимальный базис.

Определив обратную матрицу D = А-1 через алгебраические дополнения, получим:

Как видно из последнего плана симплексной таблицы, обратная матрица A-1 расположена в столбцах дополнительных переменных.

Тогда Y = C∙A-1 =

Оптимальный план двойственной задачи равен:

y1 = 0, y2 = 20, y3 = 0

Z(Y) = 350∙0+250∙20+500∙0 = 5000

**Критерий оптимальности** полученного решения. Если существуют такие допустимые решения X и Y прямой и двойственной задач, для которых выполняется равенство целевых функций F(x) = Z(y), то эти решения X и Y являются оптимальными решениями прямой и двойственной задач соответственно.

Экономический смысл всех переменных, участвующих в решении.

|  |  |
| --- | --- |
| План производства | Остатки ресурсов, единиц |
| x1=0 | x2=0 | x3=125/2 | x4=0 | x5=0 | x6=0 |
| ↨ | ↨ | ↨ | ↨ | ↨ | ↨ |
| y4=0 | y5=10 | y6=0 | y1=0 | y2=20 | y3=0 |
| Превышение затрат на ресурсы над ценой реализации (возможный убыток от производства продукции) | Объективно обусловленные оценки ресурсов (теневые, условные, скрытые цены ресурсов) |

Наличие пары нулевых переменных x1 = 0 и y4 = 0 свидетельствует, что двойственная задача имеет альтернативные решения.

**Определение дефицитных и недефицитных (избыточных) ресурсов**. Вторая теорема двойственности.

Подставим оптимальный план прямой задачи в систему ограниченной математической модели:

3∙0 + 1∙0 + 2∙125/2 = 125 < 350

2∙0 + 3∙0 + 4∙125/2 = 250 = 250

1∙0 + 2∙0 + 6∙125/2 = 375 < 500

1-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. ресурс 1-го вида израсходован не полностью. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане y1 = 0.

Неиспользованный экономический резерв ресурса 1 составляет 225 (350-125).

Этот резерв не может быть использован в оптимальном плане, но указывает на возможность изменений в объекте моделирования (например, резерв ресурса можно продать или сдать в аренду).

2-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 2-й ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теореме двойственности отлична от нуля (y2 ≠ 0).

3-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. ресурс 3-го вида израсходован не полностью. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане y3 = 0.

Неиспользованный экономический резерв ресурса 3 составляет 125 (500-375).

Этот резерв не может быть использован в оптимальном плане, но указывает на возможность изменений в объекте моделирования (например, резерв ресурса можно продать или сдать в аренду).

Двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности. Оценки показывают, какие ресурсы являются более дефицитными, (они будут иметь самые высокие оценки), какие менее дефицитными и какие совсем недефицитны (избыточны) - они будут равны нулю.

**Применяя теорему двойственности**, получим решение двойственной задачи по известному решению исходной задачи. Найдем решение двойственной задачи у∙ воспользовавшись второй теоремой двойственности и известным оптимальным планом х∙.

Поскольку x3>0, 3-е ограничение в двойственной задаче будет равенством.

Таким образом, решение двойственной задачи сводится к решению уравнений при следующих условиях:

y1 = 0, y3 = 0

2y1+4y2+6y3 = 80

350y1+250y2+500y3 → min

или

4y2 = 80

350y1+250y2+500y3 → min

**Обоснование эффективности оптимального плана**.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получим:

3∙0 + 2∙20 + 1∙0 = 40 = 40

1∙0 + 3∙20 + 2∙0 = 60 > 50

2∙0 + 4∙20 + 6∙0 = 80 = 80

1-ое ограничение двойственной задачи выполняется как равенство. Это означает, что 1-й продукт экономически выгодно производить (убытки от производства этого вида продукции отсутствуют), а его использование предусмотрено оптимальным планом прямой задачи (x1>0).

2-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. продукцию 2-го вида производить экономически не выгодно. И действительно в оптимальном плане прямой задачи x2 = 0.

При этом разница между ценами (60 - 50 = 10) показывает величину изменения целевой функции F(x) при введении дополнительной единицы xi.

3-ое ограничение двойственной задачи выполняется как равенство. Это означает, что 3-й продукт экономически выгодно производить (убытки от производства этого вида продукции отсутствуют), а его использование предусмотрено оптимальным планом прямой задачи (x3>0).

**Задача о “Расшивке узких мест производства”**.

Задача сводиться к нахождению объемов приобретения дополнительных ресурсов, удовлетворяющих указанным условиям, и вычислению дополнительной возможной прибыли.

Пусть T – вектор дополнительных объемов ресурсов, при этом, для сохранения структуры производственной программы, должно выполняться условие устойчивости двойственных оценок:

H+Q-1T ≥ 0

Поскольку y1 = 0, y3 = 0, то задача состоит в том, чтобы найти вектор T=(0, t2, 0)T, максимизирующий суммарный прирост прибыли: W=20t2, при условии сохранения структуры производственной программы:

причем дополнительные объемы ресурсов, по смыслу задачи, не могут быть отрицательными, т.е.: t2 ≥ 0

Получаем систему неравенств:

1/2t2 ≤ 225

-1/4t2 ≤ 125/2

3/2t2 ≤ 125

**Анализ устойчивости оптимального плана**.

Проведем анализ устойчивости оптимального плана и оценим степень влияния изменения ресурсов на значение целевой функции.

*Чувствительность решения к изменению коэффициентов целевой функции*.

Так как любые изменения коэффициентов целевой функции оказывают влияние на оптимальность полученного ранее решения, то наша цель - найти такие диапазоны изменения коэффициентов в целевой функции (рассматривая каждый из коэффициентов отдельно), при которых оптимальные значения переменных остаются неизменными.

Пусть каждое значение параметра целевой функции изменится на ∆ сi. Найдем интервалы, при которых будет экономически выгодно использование ресурсов.

Допустимые диапазоны изменения коэффициентов в целевой функции определятся из соотношений:

*Вариант расчета №1*.

Отсюда получаем условие устойчивости:

1/2Δc3+40≥0

3/4Δc3+60≥0

1/4Δc3+20≥0

Затем последовательно находим интервалы устойчивости:

Δc3≠0, c3 ≥ 0

*Вариант расчета №2*.

Верхняя граница для: ∆c1+

∆c1+ = |max[yk/dk1]| для dk1<0.

Таким образом, 1-й коэффициент может быть увеличен на 0.

∆c1- = +∞

Интервал изменения равен:

(c1 - ∆c1-; +∞)

[40-∞;40+0] = [-∞;40]

Верхняя граница для: ∆c2+

∆c2+ = |max[yk/dk2]| для dk2<0.

Таким образом, 2-й коэффициент может быть увеличен на 10.

∆c2- = +∞

Интервал изменения равен:

(c2 - ∆c2-; +∞)

[50-∞;50+10] = [-∞;60]

3-й параметр целевой функции может изменяться в пределах:

∆c3- = min [yk/d3k] для d3k>0.

∆c3+ = |max[yk/d3k]| для d3k<0.

∆c3+ = |max[-∞]| = +∞

Таким образом, 3-й параметр может быть уменьшен на 0 или увеличен на ∞.

Интервал изменения равен:

(c3 - ∆c-3; c3 + ∆c3+)

[80-0; 80+∞] = [80;∞]

Если значение c3 будет лежать в данном интервале, то оптимальный план не изменится.

*Чувствительность решения к изменению запасов сырья*.

Из теоремы об оценках известно, что колебание величины bi приводит к увеличению или уменьшению f(X).

Оно определяется величиной yi в случае, когда при изменении величин bi значения переменных уi в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными.

Поэтому необходимо найти такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений исходной ЗЛП, в которых оптимальный план двойственной задачи не менялся бы.

**Найдем интервалы устойчивости ресурсов**.

*Вариант расчета №1*.

При этом условие устойчивости двойственных оценок задачи исходит из выражения:

X1=X0+ΔX=A-1(B+ΔB)

в которой компоненты вектора X1 должны быть неотрицательны, т.е. все xj≥0. На этом основании для нашей задачи можно записать:

Отсюда получаем условие устойчивости:

Δb1-1/2Δb2+225≥0

1/4Δb2+125/2≥0

-3/2Δb2+Δb3+125≥0

Затем последовательно находим интервалы устойчивости:

Δb1≠0, Δb2=Δb3=0, Δb1≥-225

Δb2≠0, Δb1=Δb3=0, Δb2≤450, Δb2≥-250, Δb2≤250/3

Δb3≠0, Δb1=Δb2=0, Δb3≥-125

Для корректного решения задачи необходимо ввести еще дополнительные ограничения, вытекающие из экономического содержания решаемой задачи. Предельные значения (нижняя и верхняя границы) изменения каждого из ресурсов, для которых двойственные оценки остаются неизменными, определяются еще и таким образом.

*Вариант расчета №2*.

Нижняя граница для: ∆b1-

∆b1- = min[xk/dk1] для dk1>0.

Таким образом, 1-й запас может быть уменьшен на 225.

1-й вид ресурса в оптимальном плане недоиспользован, является недефицитным. Увеличение данного ресурса приведет лишь к росту его остатка. При этом структурных изменений в оптимальном плане не будет, так как двойственная оценка y1 = 0. Другими словами, верхняя граница b1+ = +∞

∆b1+ = +∞

Интервал изменения равен:

(b1 - ∆b1-; +∞)

[350-225; +∞] = [125;+∞]

2-й запас может изменяться в пределах:

∆b2- = min[xk/dk2] для dk2>0.

∆b2+ = |max[xk/dk2]| для dk2<0.

Таким образом, 2-й запас может быть уменьшен на 250 или увеличен на 250/3.

Интервал изменения равен:

(b2 - ∆b2-; b2 + ∆b2)+

[250-250; 250+250/3] = [0;1000/3]

Нижняя граница для: ∆b3-

∆b3- = min[xk/dk3] для dk3>0.

Таким образом, 3-й запас может быть уменьшен на 125.

3-й вид ресурса в оптимальном плане недоиспользован, является недефицитным. Увеличение данного ресурса приведет лишь к росту его остатка. При этом структурных изменений в оптимальном плане не будет, так как двойственная оценка y3 = 0. Другими словами, верхняя граница b3+ = +∞

∆b3+ = +∞

Интервал изменения равен:

(b3 - ∆b3-; +∞)

[500-125; +∞] = [375;+∞]

В оптимальный план не вошла основная переменная x1, т.е. ее не выгодно использовать. Определим максимально возможное значение в рамках полученных двойственных оценок:

x1 может изменяться в пределах:

-125/2 ≤ x1 ≤ 225/2

В оптимальный план не вошла основная переменная x3, т.е. ее не выгодно использовать. Определим максимально возможное значение в рамках полученных двойственных оценок:

x3 может изменяться в пределах:

0 ≤ x3 ≤ 125/2

Определим, сколько дополнительно потребуется единиц 3-го ресурса, чтобы компенсировать снижение прибыли от уменьшения ресурса 2-го вида на величину ∆b =2.

Снижение прибыли будет равно:

∆f = y2∙∆b2 = 40

**Влияние запасов ресурсов на оптимальное решение прямой задачи**.

Величина двойственной оценки показывает, на сколько возрастает значение целевой функции F(x) при увеличении дефицитного ресурса на единицу.

Пусть запас ресурса №1 изменился на величину Δb1 = 0.5. Новый запас этого ресурса равен b1 + Δb1 = 350 + 0.5 = 350.5 и лежит в интервале устойчивости, поэтому его влияние на величину максимальной стоимости продукции можно определить с помощью теоремы об оценках.

∆Z1 = y1∆b1 = 0·0.5 = 0

Тогда целевая функция F(x) изменится на величину: F(x∙) = F(x) + y1 Δb1 = 5000 + 0·0.5 = 5000

Затраты ∆P на приобретение 0.5 единиц 1-го ресурса: ∆P = p1∆b1 = 12·0.5 = 6

Таким образом, данное мероприятие является неэффективным (∆1 < ∆P)

**Анализ оптимального плана при изменении ресурсов**.

Двойственные оценки служат инструментом определения эффективности отдельных хозяйственных решений (технологических способов), с их помощью можно определять выгодность производства новых изделий, эффективность новых технологических способов:

Если ∆ ≤ 0 - выгодно. Если ∆ > 0 - невыгодно.

Оценим целесообразность включения в план нового вида продукции ценой 60 единиц, если нормы затрат ресурсов 3, 2, 4 единиц:

3∙0 + 2∙20 + 4∙0 = 40 ≤ 60

Поскольку реальная цена новой группы продукции меньше или равна, то производство продукции нового вида выгодно.

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Двойственная задача линейного программирования](https://math.semestr.ru/simplex/msimplex.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Задачи динамического программирования онлайн](https://math.semestr.ru/dinam/dinam_manual.php)

[Графический метод решения задач линейного программирования](https://math.semestr.ru/lp/index.php)

[Двойственный симплекс-метод](https://math.semestr.ru/simplex/pmethod.php)

[Теория игр онлайн](https://math.semestr.ru/games/games_manual.php)

[Метод Гомори](https://math.semestr.ru/simplex/integer.php)

[Транспортная задача](https://math.semestr.ru/transp/index.php)

[Расчет сетевого графика](https://math.semestr.ru/setm/index.php)

[Теория массового обслуживания онлайн](https://math.semestr.ru/cmo/cmo_manual.php)

[Анализ и планирование межотраслевых связей](https://axd.semestr.ru/econ/balans.php)