**Симплекс-метод**.

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим минимальное значение целевой функции F(X) = -x1-2x2-3x3+x4 при следующих условиях-ограничений.

-x1-3x2+x3+2x4=4

x1-x2+x3=0

Введем **искусственные переменные x**: в 1-м равенстве вводим переменную x5; в 2-м равенстве вводим переменную x6;

-x1-3x2+x3+2x4+x5 = 4

x1-x2+x3+x6 = 0

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так:

F(X) = -1x1-2x2-3x3+x4+Mx5+Mx6 → min

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной М, очень большое положительное число, которое обычно не задается.

Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса.

Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

x5 = 4+x1+3x2-x3-2x4

x6 = 0-x1+x2-x3

которые подставим в целевую функцию:

F(X) = -x1-2x2-3x3 + x4 + M(4+x1+3x2-x3-2x4) + M(0-x1+x2-x3) → min

или

F(X) = (-1)x1+(-2+4M)x2+(-3-2M)x3+(1-2M)x4+(4M) → min

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

**Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x5, x6

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X0 = (0,0,0,0,4,0)

**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x5 | 4 | -1 | -3 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| x6 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | 4M | 1 | 2-4M | 3+2M | -1+2M | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x3, так как это наибольший коэффициент.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai3

и из них выберем наименьшее:

min (4 : 1 , 0 : 1 ) = 0

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x5 | 4 | -1 | -3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 |
| x6 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| F(X1) | 4M | 1 | 2-4M | 3+2M | -1+2M | 0 | 0 |   |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x6 в план 1 войдет переменная x3.

Строка, соответствующая переменной x3 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x6 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=1. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x3 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x3 и столбец x3. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А∙В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (1), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 4-(0∙1):1 | -1-(1∙1):1 | -3-(-1∙1):1 | 1-(1∙1):1 | 2-(0∙1):1 | 1-(0∙1):1 | 0-(1∙1):1 |
| 0 : 1 | 1 : 1 | -1 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 | 0 : 1 | 1 : 1 |
| (0)-(0∙(3+2M)):1 | (1)-(1∙(3+2M)):1 | (2-4M)-(-1∙(3+2M)):1 | (3+2M)-(1∙(3+2M)):1 | (-1+2M)-(0∙(3+2M)):1 | (0)-(0∙(3+2M)):1 | (0)-(1∙(3+2M)):1 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x5 | 4 | -2 | -2 | 0 | 2 | 1 | -1 |
| x3 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X1) | 4M | -2-2M | 5-2M | 0 | -1+2M | 0 | -3-2M |

**Итерация №1**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x4, так как это наибольший коэффициент.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai4

и из них выберем наименьшее:

min (4 : 2 , - ) = 2

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x5 | 4 | -2 | -2 | 0 | 2 | 1 | -1 | 2 |
| x3 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | - |
| F(X2) | 4M | -2-2M | 5-2M | 0 | -1+2M | 0 | -3-2M |   |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x5 в план 2 войдет переменная x4.

Строка, соответствующая переменной x4 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x5 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=2. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x4 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x4 и столбец x4. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 4 : 2 | -2 : 2 | -2 : 2 | 0 : 2 | 2 : 2 | 1 : 2 | -1 : 2 |
| 0-(4∙0):2 | 1-(-2∙0):2 | -1-(-2∙0):2 | 1-(0∙0):2 | 0-(2∙0):2 | 0-(1∙0):2 | 1-(-1∙0):2 |
| (-3-2M)-(4∙(-1+2M)):2 | (-2-2M)-(-2∙(-1+2M)):2 | (5-2M)-(-2∙(-1+2M)):2 | (0)-(0∙(-1+2M)):2 | (-1+2M)-(2∙(-1+2M)):2 | (0)-(1∙(-1+2M)):2 | (-3-2M)-(-1∙(-1+2M)):2 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 2 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1/2 | -1/2 |
| x3 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X2) | 2 | -3 | 4 | 0 | 0 | 1/2-M | -7/2-M |

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 2 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1/2 | -1/2 |
| x3 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X3) | 2 | -3 | 4 | 0 | 0 | 1/2-M | -7/2-M |

Так как в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (они равны нулю), то данное решение является допустимым.

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0, x4 = 2

F(X) = -1∙0 -2∙0 -3∙0 + 1∙2 = 2

**Примечание**:

**1. По какому методу пересчитываются симплекс-таблицы?**

Используется правило прямоугольника (метод жордановских преобразований).

**2. Обязательно ли каждый раз выбирать максимальное значение из индексной строки?**

Можно не выбирать, но это может привести к зацикливанию алгоритма.

**3. В индексной строке в n-ом столбце нулевое значение. Что это означает?**

Нулевые значения должны соответствовать переменным, вошедшим в базис. Если в индексной строке симплексной таблицы оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, **не вошедшей** в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет множество оптимальных планов.

Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Решение симплекс-методом](https://math.semestr.ru/simplex/simplex.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Графический метод решения задач линейного программирования](https://math.semestr.ru/lp/index.php)

[Двойственный симплекс-метод](https://math.semestr.ru/simplex/pmethod.php)

[Двойственная задача линейного программирования](https://math.semestr.ru/simplex/msimplex.php)

[Метод Гомори](https://math.semestr.ru/simplex/integer.php)

[Транспортная задача](https://math.semestr.ru/transp/index.php)

[Расчет сетевого графика](https://math.semestr.ru/setm/index.php)