**Решение задач линейного программирования**.

**Переход к КЗЛП**.

F(X) = 100x1+80x2+90x3 → min при ограничениях:

30x1+20x2+25x3≤25

500x1+400x2+450x3≤450

9x1+8x2+7x3≥8

x1+x2+x3=1

x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0

Для приведения ЗЛП к канонической форме необходимо:

1. Поменять знак у целевой функции.

Сведем задачу F(X) → min к задаче F(X) → max. Для этого умножаем F(X) на (-1).

F(X) = -100x1-80x2-90x3

В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x4. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x5. В 3-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x6 со знаком минус.

30x1+20x2+25x3+x4 = 25

500x1+400x2+450x3+x5 = 450

9x1+8x2+7x3-x6 = 8

x1+x2+x3 = 1

Целевая функция для решения задачи на min:

F(X) = 100x1+80x2+90x3 → min

**Переход к СЗЛП**.

Расширенная матрица системы ограничений-равенств данной задачи:

$$\left|\begin{matrix}30&20&25&1&0&0&25\\500&400&450&0&1&0&450\\9&8&7&0&0&-1&8\\1&1&1&0&0&0&1\end{matrix}\right|$$

Приведем систему к единичной матрице методом жордановских преобразований.

1. В качестве базовой переменной можно выбрать x4.

2. В качестве базовой переменной можно выбрать x5.

3. В качестве базовой переменной можно выбрать x6.

Получаем новую матрицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 30 | 20 | 25 | 1 | 0 | 0 | 25 |
| 500 | 400 | 450 | 0 | 1 | 0 | 450 |
| -9 | -8 | -7 | 0 | 0 | 1 | -8 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

4. В качестве базовой переменной можно выбрать x3.

Разрешающий элемент РЭ=1. Строка, соответствующая переменной x4, получена в результате деления всех элементов строки x3 на разрешающий элемент РЭ=1. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x4 записываем нули.

Все остальные элементы определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 30-(1∙25):1 | 20-(1∙25):1 | 25-(1∙25):1 | 1-(0∙25):1 | 0-(0∙25):1 | 0-(0∙25):1 | 25-(1∙25):1 |
| 500-(1∙450):1 | 400-(1∙450):1 | 450-(1∙450):1 | 0-(0∙450):1 | 1-(0∙450):1 | 0-(0∙450):1 | 450-(1∙450):1 |
| -9-(1∙-7):1 | -8-(1∙-7):1 | -7-(1∙-7):1 | 0-(0∙-7):1 | 0-(0∙-7):1 | 1-(0∙-7):1 | -8-(1∙-7):1 |
| 1 : 1 | 1 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 | 0 : 1 | 0 : 1 | 1 : 1 |

Получаем новую матрицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | -5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -50 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Поскольку в системе имеется единичная матрица, то в качестве базисных переменных принимаем X = (4,5,6,3).

Соответствующие уравнения имеют вид:

5x1-5x2+x4 = 0

50x1-50x2+x5 = 0

-2x1-x2+x6 = -1

x1+x2+x3 = 1

Выразим базисные переменные через остальные:

x4 = -5x1+5x2

x5 = -50x1+50x2

x6 = 2x1+x2-1

x3 = -x1-x2+1

Подставим их в целевую функцию:

F(X) = 100x1+80x2+90(-x1-x2+1)

или

F(X) = 10x1-10x2+90 → min

Система неравенств:

-5x1+5x2 ≥ 0

-50x1+50x2 ≥ 0

2x1+x2-1 ≥ 0

-x1-x2+1 ≥ 0

Приводим систему неравенств к следующему виду:

5x1-5x2 ≤ 0

50x1-50x2 ≤ 0

-2x1-x2 ≤ -1

x1+x2 ≤ 1

F(X) = 10x1-10x2+90 → min

Упростим систему.

5x1-5x2 ≤ 0

50x1-50x2 ≤ 0

-2x1-x2 ≤ -1

x1+x2 ≤ 1

F(X) = 10x1-10x2+90 → min

Если задача ЛП решается на поиск max-го значения, то стандартная форма будет иметь следующий вид:

-5x1+5x2 ≤ 0

-50x1+50x2 ≤ 0

2x1+x2 ≤ 1

-x1-x2 ≤ -1

F(X) = -10x1+10x2-90 → max

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Поскольку в правой части присутствуют отрицательные значения, умножим соответствующие строки на (-1).

Определим минимальное значение целевой функции F(X) = 10x1-10x2+90 при следующих условиях-ограничений.

При вычислениях значение Fc = 90 временно не учитываем.

5x1-5x2+x4=0

50x1-50x2+x5=0

2x1+x2-x6-1=1

x1+x2+x3+1=1

Расширенная матрица системы ограничений-равенств данной задачи:

$$\left|\begin{matrix}5&-5&0&1&0&0&0\\50&-50&0&0&1&0&0\\2&1&0&0&0&-1&1\\1&1&1&0&0&0&1\end{matrix}\right|$$

Приведем систему к единичной матрице методом жордановских преобразований.

1. В качестве базовой переменной можно выбрать x4.

2. В качестве базовой переменной можно выбрать x5.

3. В качестве базовой переменной можно выбрать x6.

Получаем новую матрицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | -5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -50 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

4. В качестве базовой переменной можно выбрать x3.

Поскольку в системе имеется единичная матрица, то в качестве базисных переменных принимаем X = (4,5,6,3).

Выразим базисные переменные через остальные:

x4 = -5x1+5x2

x5 = -50x1+50x2

x6 = 2x1+x2-1

x3 = -x1-x2+1

Подставим их в целевую функцию:

F(X) = 10x1-10x2

Среди свободных членов bi имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x6 следует ввести переменную x2.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 5 | 15 | 0 | 0 | 1 | 0 | -5 |
| x5 | 50 | 150 | 0 | 0 | 0 | 1 | -50 |
| x2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | 10 | 30 | 0 | 0 | 0 | 0 | -10 |

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 0-(-1∙-5):-1 | 5-(-2∙-5):-1 | -5-(-1∙-5):-1 | 0-(0∙-5):-1 | 1-(0∙-5):-1 | 0-(0∙-5):-1 | 0-(1∙-5):-1 |
| 0-(-1∙-50):-1 | 50-(-2∙-50):-1 | -50-(-1∙-50):-1 | 0-(0∙-50):-1 | 0-(0∙-50):-1 | 1-(0∙-50):-1 | 0-(1∙-50):-1 |
| -1 : -1 | -2 : -1 | -1 : -1 | 0 : -1 | 0 : -1 | 0 : -1 | 1 : -1 |
| 1-(-1∙1):-1 | 1-(-2∙1):-1 | 1-(-1∙1):-1 | 1-(0∙1):-1 | 0-(0∙1):-1 | 0-(0∙1):-1 | 0-(1∙1):-1 |

Выразим базисные переменные через остальные:

x4 = -15x1+5x6+5

x5 = -150x1+50x6+50

x2 = -2x1+x6+1

x3 = x1-x6

Подставим их в целевую функцию:

F(X) = 10x1-10(-2x1+x6+1)+90

или

F(X) = 30x1-10x6+80

15x1+x4-5x6=5

150x1+x5-50x6=50

2x1+x2-x6=1

-x1+x3+x6=0

При вычислениях значение Fc = 80 временно не учитываем.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x4, x5, x2, x3

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X0 = (0,1,0,5,50,0)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 5 | 15 | 0 | 0 | 1 | 0 | -5 |
| x5 | 50 | 150 | 0 | 0 | 0 | 1 | -50 |
| x2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | 0 | -30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x6, так как это наибольший коэффициент.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai6

и из них выберем наименьшее:

min (- , - , - , 0 : 1 ) = 0

Следовательно, 4-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x4 | 5 | 15 | 0 | 0 | 1 | 0 | -5 | - |
| x5 | 50 | 150 | 0 | 0 | 0 | 1 | -50 | - |
| x2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | - |
| x3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| F(X1) | 0 | -30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 |

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x3 в план 1 войдет переменная x6.

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 5 | 10 | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 50 | 100 | 0 | 50 | 0 | 1 | 0 |
| x2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X1) | 0 | -20 | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 |

Конец итераций: индексная строка не содержит положительных элементов - найден оптимальный план

Среди значений индексной строки нет положительных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 5 | 10 | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 50 | 100 | 0 | 50 | 0 | 1 | 0 |
| x2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X2) | 0 | -20 | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 |

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 0, x2 = 1, x3 = 0, x4 = 5, x5 = 50, x6 = 0

F(X) = 10∙0 -10∙1 + 90 = 80

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Решение задач линейного программирования](https://math.semestr.ru/simplex/simplex-standart.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Задачи динамического программирования онлайн](https://math.semestr.ru/dinam/dinam_manual.php)

[Графический метод решения задач линейного программирования](https://math.semestr.ru/lp/index.php)

[Двойственный симплекс-метод](https://math.semestr.ru/simplex/pmethod.php)

[Теория игр онлайн](https://math.semestr.ru/games/games_manual.php)

[Метод Гомори](https://math.semestr.ru/simplex/integer.php)

[Транспортная задача](https://math.semestr.ru/transp/index.php)

[Расчет сетевого графика](https://math.semestr.ru/setm/index.php)

[Теория массового обслуживания онлайн](https://math.semestr.ru/cmo/cmo_manual.php)