При выборе вида функции тренда можно воспользоваться методом конечных разностей (обязательным условием применения данного подхода является равенство интервалов между уровнями ряда).

Конечными разностями первого порядка являются разности между последовательными уровнями ряда:

Δ1t = Yt - Yt-1

Конечными разностями второго порядка являются разности между последовательными конечными разностями *1-го порядка*:

Δ2t = Δ1t - Δ1t-1

Конечными разностями j-го порядка являются разности между последовательными конечными разностями *(j–1)-го порядка*:

Δjt = Δj-1t - Δj-1t-1

Если общая тенденция выражается линейным уравнением Y = a + bt, тогда конечные разности первого порядка постоянны: Δ12 = Δ13 = ... = Δ1n, а разности второго порядка равны нулю.

Если общая тенденция выражается параболой второго порядка: Y = a+ bt + ct2, то получим постоянными конечные разности второго порядка: Δ23 = Δ24 = ... = Δ2n, нулевыми – разности третьего порядка.

Если примерно постоянными оказываются темпы роста, то для выравнивания применяется показательная функция.

При выборе формы уравнения следует исходить из объема имеющейся информации. Чем больше параметров содержит уравнение, тем больше должно быть наблюдений при одной и той же степени надежности оценивания.

Выбор формы кривой может осуществляться и на основе принятого критерия качества уравнения регрессии, в качестве которого может служить сумма квадратов отклонений фактических значений уровня ряда от значений уровней, рассчитанных по уравнению тренда.

Из совокупности кривых выбирается та, которой соответствует минимальное значение критерия. Другим статистическим критерием является коэффициент множественной детерминации R2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| yi | Δ1t | Δ2t | Темп роста |
| 751 | - | - | - |
| 689 | -62 | - | 0.917 |
| 598 | -91 | -29 | 0.868 |
| 526 | -72 | 19 | 0.88 |
| 615 | 89 | 161 | 1.169 |
| 674 | 59 | -30 | 1.096 |
| 816 | 142 | 83 | 1.211 |

Линейное уравнение тренда имеет вид y = bt + a

**1. Находим параметры уравнения методом наименьших квадратов**.

Система уравнений МНК:

an + b∑t = ∑y

a∑t + b∑t2 = ∑y∙t

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| t | y | t2 | y2 | t y |
| 2017 | 751 | 4068289 | 564001 | 1514767 |
| 2018 | 689 | 4072324 | 474721 | 1390402 |
| 2019 | 598 | 4076361 | 357604 | 1207362 |
| 2020 | 526 | 4080400 | 276676 | 1062520 |
| 2021 | 615 | 4084441 | 378225 | 1242915 |
| 2022 | 674 | 4088484 | 454276 | 1362828 |
| 2023 | 816 | 4092529 | 665856 | 1650768 |
| 14140 | 4669 | 28562828 | 3171359 | 9431562 |
| Ср.знач. | 667 | 4080404 | 453051.286 | 1347366 |

Для наших данных система уравнений имеет вид:

7a + 14140b = 4669

14140a + 28562828b = 9431562

Из первого уравнения выражаем a и подставим во второе уравнение

Получаем a = -12463, b = 6.5

Уравнение тренда:

Эмпирические коэффициенты тренда *a* и *b* являются лишь оценками теоретических коэффициентов βi, а само уравнение отражает лишь общую тенденцию в поведении рассматриваемых переменных.

Коэффициент тренда b = 6.5 показывает среднее изменение результативного показателя (в единицах измерения *у*) с изменением периода времени *t* на единицу его измерения. В данном примере с увеличением *t* на 1 единицу, *y* изменится в среднем на 6.5.

**Ошибка аппроксимации**.

Оценим качество уравнения тренда с помощью средней относительной ошибки аппроксимации.

Ошибка аппроксимации в пределах 5%-7% свидетельствует о хорошем подборе уравнения тренда к исходным данным.

Поскольку ошибка больше 7%, то данное уравнение не желательно использовать в качестве тренда.

Для определения размеров погрешности или точности прогноза показателя Y рассчитаем коэффициент несоответствия Тейла по формуле:

Этот показатель изменяется от 0 до 1. Чем ближе его значение к нулю, тем лучше результаты прогнозирования.

Средние значения

Дисперсия

Среднеквадратическое отклонение

**Коэффициент эластичности**.

Коэффициент эластичности представляет собой показатель силы связи фактора *t* с результатом *у*, показывающий, на сколько процентов изменится значение *у* при изменении значения фактора на 1%.

Коэффициент эластичности больше 1. Следовательно, при изменении t на 1%, Y изменится более чем на 1%. Другими словами - изменение t существенно влияет на Y.

**Эмпирическое корреляционное отношение**.

Эмпирическое корреляционное отношение вычисляется для всех форм связи и служит для измерение тесноты зависимости. Изменяется в пределах [0;1].

η = = = 0.144

где

В отличие от линейного коэффициента корреляции он характеризует тесноту нелинейной связи и не характеризует ее направление. Изменяется в пределах [0;1].

Связи между признаками могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии оцениваются по шкале Чеддока:

0.1 < η < 0.3: слабая;

0.3 < η < 0.5: умеренная;

0.5 < η < 0.7: заметная;

0.7 < η < 0.9: высокая;

0.9 < η < 1: весьма высокая;

Полученная величина свидетельствует о том, что изменение временного периода t не существенно влияет на y.

**Коэффициент детерминации**.

т.е. в 2.07% случаев t влияет на изменение y. Другими словами - точность подбора уравнения тренда - низкая.

Для оценки качества параметров уравнения построим расчетную таблицу (табл. 2)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | y | y(t) |  | (yi-y(t))2 | (yi-y(t)) : yi |
| 2017 | 751 | 647.5 | 7056 | 10712.25 | 0.138 |
| 2018 | 689 | 654 | 484 | 1225 | 0.0508 |
| 2019 | 598 | 660.5 | 4761 | 3906.25 | 0.105 |
| 2020 | 526 | 667 | 19881 | 19881 | 0.268 |
| 2021 | 615 | 673.5 | 2704 | 3422.25 | 0.0951 |
| 2022 | 674 | 680 | 49 | 36 | 0.0089 |
| 2023 | 816 | 686.5 | 22201 | 16770.25 | 0.159 |
|   |   | 4669 | 57136 | 55953 | 0.824 |

**2. Анализ точности определения оценок параметров уравнения тренда**.

Дисперсия ошибки уравнения.

где m = 1 - количество влияющих факторов в модели тренда.

Стандартная ошибка уравнения.

**Интервальный прогноз**.

Определим среднеквадратическую ошибку прогнозируемого показателя.

Uy = yn+L ± K

где

L - период упреждения; уn+L - точечный прогноз по модели на (n + L)-й момент времени; n - количество наблюдений во временном ряду; Sy - стандартная ошибка прогнозируемого показателя; Tтабл - табличное значение критерия Стьюдента для уровня значимости α и для числа степеней свободы, равного *n-2*.

По таблице Стьюдента находим Tтабл.

Tтабл (n-m-1;α/2) = (1;0.05) = 3.163

Точечный прогноз, t = 2024: y(2024) = 6.5∙2024 -12463 = 693

693 - 438.09 = 254.91 ; 693 + 438.09 = 1131.09

Интервальный прогноз:

t = 2024: (254.91;1131.09)

Точечный прогноз, t = 2025: y(2025) = 6.5∙2025 -12463 = 699.5

699.5 - 477.4 = 222.1 ; 699.5 + 477.4 = 1176.9

Интервальный прогноз:

t = 2025: (222.1;1176.9)

Точечный прогноз, t = 2026: y(2026) = 6.5∙2026 -12463 = 706

706 - 521.44 = 184.56 ; 706 + 521.44 = 1227.44

Интервальный прогноз:

t = 2026: (184.56;1227.44)

Точечный прогноз, t = 2027: y(2027) = 6.5∙2027 -12463 = 712.5

712.5 - 569.1 = 143.4 ; 712.5 + 569.1 = 1281.6

Интервальный прогноз:

t = 2027: (143.4;1281.6)

Точечный прогноз, t = 2028: y(2028) = 6.5∙2028 -12463 = 719

719 - 619.56 = 99.44 ; 719 + 619.56 = 1338.56

Интервальный прогноз:

t = 2028: (99.44;1338.56)

**3. Проверка гипотез относительно коэффициентов линейного уравнения тренда**.

1) t-статистика. Критерий Стьюдента.

По таблице Стьюдента находим Tтабл

Tтабл (n-m-1;α/2) = (5;0.025) = 3.163

Статистическая значимость коэффициента a не подтверждается..

Статистическая значимость коэффициента b не подтверждается..

*Доверительный интервал для коэффициентов уравнения тренда*.

Определим доверительные интервалы коэффициентов тренда, которые с надежность 95% будут следующими:

(b - tнабл Sb;b + tнабл Sb)

(6.5 - 3.163∙19.992; 6.5 + 3.163∙19.992)

(-56.73;69.73)

Так как точка 0 (ноль) лежит внутри доверительного интервала, то интервальная оценка коэффициента *b* статистически незначима.

(a - tнабл Sa;a + tнабл Sa)

(-12463 - 3.163∙40383.063; -12463 + 3.163∙40383.063)

(-140194.63;115268.63)

Так как точка 0 (ноль) лежит внутри доверительного интервала, то интервальная оценка коэффициента *a* статистически незначима.

2) F-статистика. Критерий Фишера.

Коэффициент детерминации.

 = 1 - = 0.0207

Находим из таблицы Fkp(1;5;0.05) = 6.6079

где m - количество факторов в уравнении тренда (m=1).

Поскольку F < Fkp, то коэффициент детерминации (и в целом уравнение тренда) статистически не значим.

**Выводы**.

Изучена временная зависимость Y от времени t. На этапе спецификации был выбран линейный тренд. Оценены её параметры методом наименьших квадратов. Статистическая значимость уравнения проверена с помощью коэффициента детерминации и критерия Фишера. Установлено, что в исследуемой ситуации 2.07% общей вариабельности Y объясняется изменением временного параметра. Установлено также, что параметры модели статистически не значимы. Возможна экономическая интерпретация параметров модели - с каждым периодом времени t значение Y в среднем увеличивается на 6.5 ед.изм. Полученные оценки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза. При x=, Y будет находиться в пределах от до ед.изм. и с вероятностью 95% не выйдет за эти пределы.

Решение было получено и оформлено с помощью сервиса:

[Метод аналитического выравнивания](https://math.semestr.ru/trend/analis.php)

Вместе с этой задачей решают также:

[Уравнение регрессии](https://math.semestr.ru/corel/corel.php)

[Уравнение множественной регрессии](https://math.semestr.ru/regress/corel.php)

[Показатели вариации](https://math.semestr.ru/group/variations.php)

[Показатели динамики](https://axd.semestr.ru/dinam/group.php)